МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

Н. В. Гриньова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

(*для слухачів другої вищої освіти спеціальності
7.05070203 «Електричний транспорт»*)

**Харків
ХНАМГ
2013**

Гриньова Н. В. Конспект лекцій з дисципліни «Інженерна графіка» (для слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.05070203 «Електричний транспорт») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Н. В. Гриньова. – Х.: ХНАМГ, 2013. – 50 с.

Укладач: Н. В. Гриньова

Рецензент: к.т.н., проф., зав. кафедрою В. І. Лусь

Рекомендовано кафедрою інженерної та комп'ютерної графіки,
протокол № 1 від 30.08.2010 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Геометрія - частина математики, що вивчає просторові форми і відносини тіл. На відміну від інших природних наук вона вивчає об'єкти реального миру в найбільш абстрактному вигляді, приймаючи до уваги тільки форму і розміри предметів і не враховуючи їх фізичних і інших властивостей (матеріал, міцність, масу, колір, шорсткість поверхонь та інше).

Предмети, що розрізняються за цими властивостями, прийнято називати геометричними фігурами. До них відносяться точка, пряма, площина, коло, трикутник, круг, куля, куб, паралелепіпед, конус, циліндр та інші. **Геометричну фігуру вважають такою, що складається з точок і визначають як будь-яка безліч точок.** Безліч U всіх точок, що розглядаються в геометрії, називають математичним простором. Будь-яка геометрична фігура Ф є підмножиною простору:**Ф ⊏ U.** Якщо говорять: **дана геометрична фігура, то це означає,** що виділена вся безліч точок**, що належать даній фігурі.**

Основними невизначуваними поняттями геометрії є **точка, пряма, площина і відстань**. Поняття "множина" також є основним, невизначуваним, але не тільки геометрії, а всієї математики. Вони не можуть бути визначені за допомогою інших, простіших понять. Всі ці поняття виникли з безпосереднього спостереження предметів, що оточували нас.

Точка є результатом перетину двох прямих, прямої і площини, в загальному випадку - трьох площин (наприклад, вершина тетраедра). Точка не має розмірів. Зображення точки дає слід вістря олівця на папері. Пряма - проста лінія, має одне вимірювання. Уявлення про пряму дає натягнута нитка, найкоротша відстань між двома точками, лінія перетинів двох площин, а зображенням її є слід, який залишає на папері вістря олівця, рухомого уподовж краю лінійки.

Площина - проста поверхня, має два вимірювання. Уявлення про площину дає спокійна поверхня води в озері, полірована поверхня столу.В даний час геометрія має численні розділи. Існують елементарна, аналітична, диференціальна, накреслювальна, проектна, Лобачевського і інша геометрія.

Нарисна геометрія є тим розділом геометрії, який вивчає теоретичні основи методів побудови зображень (проекцій) геометричних фігур на якій-небудь поверхні і способи рішення різних позиційних і метричних задач, що відносяться до цих фігур, за допомогою їх зображень. Як поверхня, на якій будуються зображення (проекції) предметів, як правило, вибирається площина. У спеціальних розділах нарисної геометрії розглядається побудова зображень на інших поверхнях, наприклад, сферичною, циліндровою і т.ін. Нарисна геометрія грунтується на аксіомах і теоремах елементарної геометрії і інваріантах центрального і паралельного проекціювання.

Сукупність двох і більш взаємозв'язаних зображень предмету називається кресленням. Креслення має виключно велике значення в практичній діяльності людини. Він є засобом виразу задумів вченого, конструктора і основним виробничим документом, за яким здійснюється будівництво будівель і інженерних споруд, виготовлення машин, механізмів і їх складових частин.

Зрозуміло, не всяке креслення може служити цим цілям, а таке, яке володіє оборотністю, легковимірюваністю, наочністю, геометричною рівноцінністю оригіналу, простотою побудови, точністю графічних рішень.

Креслення є міжнародною графічною мовою, зрозумілою будь-якій технічно грамотній людині. Нарисна геометрія - граматика цієї мови.

Для побудови зображень (проекцій) геометричних фігур нарисна геометрія застосовує метод проекціювання. Креслення, що виходять при цьому, називають проекційними.

Існує **два види проекціювання - центральне і паралельне** і відповідно **два види проекцій - центральні і паралельні**. Побудова проекцій предмету зводиться до побудови проекцій деякої безлічі його точок. Тому **вивчення методу проекціювання починають з побудови проекцій точки.**

Знання і навики, придбані при вивченні нарисної геометрії, послужать надалі основою для вирішення технічних завдань в інженерній практиці. Вивчення нарисної геометрії розвиває просторове і логічне мислення, необхідне в будь-якій області інженерної діяльності, і особливо для конструктора і проектувальника.

У цьому конспекті викладено короткий курс з інженерної графіки з позицій теоретико-множинного уявлення про геометричні фігури з використанням символічного запису пропозицій і алгоритмів.

СИМВОЛІКА І ПОЗНАЧЕННЯ

Знаки геометричні

а. Знаки, що позначають геометричні фігури:

Ф (фе - прописна буква грецького алфавіту) - геометрична фігура. **A, B, C**,...або **1, 2, 3**,...(прописні букви латинського алфавіту або арабські цифри) – точки простору.

a, b, c,...(рядкові букви латинського алфавіту) - прямі або криві лінії простору.

(AB) - пряма, що проходить через точки **A** і **B**.

[AB) - промінь з початком в точці **A**.

[AB] - відрізок прямої, обмежений точками **A** і **B**.

/AB/ - довжина відрізка **[AB]**, відстань від точки **A** до точки **B**.

/A,a/ - відстань від точки **A** до прямої **a**.

/A,Г/ - відстань від точки **A** до площини **Г**.

Г (гамма), Δ(дельта), Λ(ламбда), Σ(сігма), Ψ(псі) та інші - (прописні букви грецького алфавіту) - поверхні.

<ABC ябо α, β, γ, ... рядкові букви грецького алфавіту - кути.

П' – площина проекцій, картинна площина.

$\mathbf{П_1}$ - горизонтальна площина проекцій,

$\mathbf{П_2}$ - фронтальна площина проекцій,

$\mathbf{П_3}$ - профільна площина проекцій,

$\mathbf{П_4}$, $\mathbf{П_5}$,... – інші площини проекцій.

$\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ – проекції точки **A** (горизонтальна, фронтальна, профільна).

$\mathbf{l_1}$, $\mathbf{1_2}$, $\mathbf{1_3}$ - проекції лінії **1** (горизонтальна, фронтальна, профільна).

$Г_1(A_1,B_1,C_1,)$, $Г_2(A_2,B_2,C_2)$, $Г_3(A_3,B_3,C_3)$ - проекції площини **Г(ABC)**, що проходить через точки **A, B** і **C** (горизонтальна, фронтальна, профильна).
A_∞ - нескінченно віддалена точка,
a_∞ - нескінченно віддалена пряма,
$Г_\infty$ - нескінченно віддалена площина.

б. Знаки, що позначають відносини між геометричними фігурами:

// - паралельність двох геометричних фігур,
⊥- перпендикулярність,
∸- прямі, що схрещуються,
∩- перетин геометричних фігур (множин),
= - рівні, співпадають або результат перетину геометричних фігур,
≅- конгруентність.

в. Знаки, що позначають геометричні перетворення:

→- відображається.

Знаки, що позначають множини, операції над ними і відношення між множинами

A, B, C,... - множини.
Ф - порожня множина.
a, b, c,...- елементи множини.
{...} - складається з, наприклад: **M={a, b, c}** - безліч **M**, що складається з елементів **a, b, c** (і лише з них }. **M={a:P(a)}** - множина, що складається з таких a, які володіють властивістю **P**, наприклад: **M={N:(/ON/=R)} - M** є безліч таких точок **N**, відстань яких до точки **O** рівне R (коло на площині або сфера у просторі).
∈- приналежність, наприклад:

а) A ∈ l - точка **A** належить прямий **l**,

б) b ∋ M - пряма **b** проходить через точку **M** або пряма b містить точку **M**,

в) ∉- не належить.

⊂- - включення (є частиною, підмножиною, міститься в..., включає, містить в собі), наприклад:

а) a ⊂ Г - пряма **a** належить площині **Г** (розуміється в сенсі: безліч точок прямої **a** є підмножина безлічі всіх точок площини **Г**),

б) Г ⊃ a- площина **Г** проходить через пряму **a** або площина **Г** містить пряму **a**.

- об'єднання множин, наприклад:
ABCD = [AB] ∪[BC] ∪[CD] - ламана лінія є об'єднання відрізків.
∩- перетин множин, наприклад**: b = Δ∩Г** - пряма **b** є перетин Δ і **Г**.
l ∩ m = Ф - перетином прямих є порожня множина, тобто прямі паралельні або схрещуються.

Знаки, що позначають логічні операції

∧- відповідає союзу "і".
∨- відповідає союзу "або".
⇒- логічне проходження, означає "якщо ..., то"
⇔- в тому і лише в тому випадку, якщо**....**

ЛЕКЦІЯ №1. МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

1.1. Центральне проекціювання
1.2. Паралельне проекціювання
1.3. Інваріанти паралельного проекціювання
1.4. Ортогональне проекціювання

1.1. Центральне проекціювання

Поняття про проекційний простір

Для того, щоб побудувати проекцію, наприклад, деякої точки А, вибирається довільна площина **П'**, звана площиною проекцій, і точка **S**, що не належить площині **П'**, звана центром проекцій (рис. 1.1).

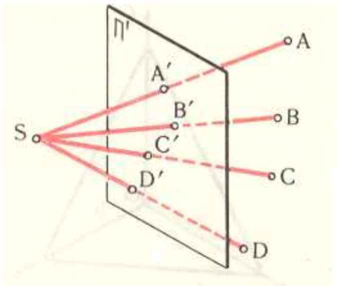

Рис. 1.1

Операція проекціювання полягає в тому, що через точки **S** і **A** проводиться пряма до перетину з площиною **П'**.

Пряма **SA** називається проеціючою прямою, а точка **A'**, перетини проеціючої прямої з площиною проекцій **П'**, - центральною проекцією точки **A.** На площини **П'** можна побудувати центральні проекції і інших точок простору (**B, C, D…**), за винятком тих, які належать площині **П**, що проходить через центр проекцій **S** і параллельною **П'**. В цьому випадку проеціючі прямі виявляються паралельними площині **П'** і точок перетину їх з площиною в звичайному сенсі немає. Цей недолік центрального проекціювання усувається доповненням евклідова простору, так званими, нескінченно видаленими або невласними елементами.

Доповнення евклідова простору невласними елементами дозволяє ліквідовувати виключення в основних положеннях елементарної геометрії і затверджувати:

1) кожні дві прямі, що належать одній площині, завжди перетинаються (у власній або невласній точках);

2) дві будь-які площини простору завжди перетинаються (лінія перетину – власна або невласна пряма);

3) пряма і площина завжди перетинаються (у власній або невласній точках), отже, проекцією точки **C**, належній площині **П**||**П'** буде невласна точка **C'**$_\infty$.

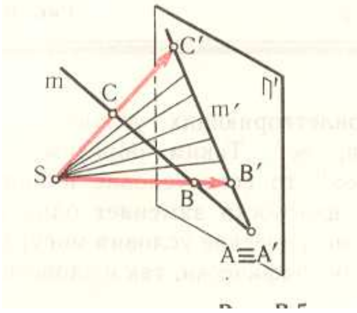

Рис. 1.2

Описаним методом центрального проекціювання може бути побудована проекція будь-якої точки геометричної фігури, а отже, і проекція самої фігури. Наприклад, центральною проекцією відрізка **[BC]** на площині **П'** є безліч центральних проекцій всіх точок відрізка **[BC]** → **[B'C']** (рис. 1.2).

При центральному проекціюванні відбувається спотворення форми, розмірів і деяких інших властивостей предмету (рис. 1.3). Разом з тим, неважко відмітити, що частина властивостей зберігається, наприклад, проекція точки є точка; проекція прямої – теж пряма лінія; якщо точка належить прямій то проекція точки належить проекції тієї ж прямої; точка перетину прямих проектується в точку перетину їх проекцій. Проекція предмету, побудована методом центрального проекціювання, називається перспективою (рис. 1.3).

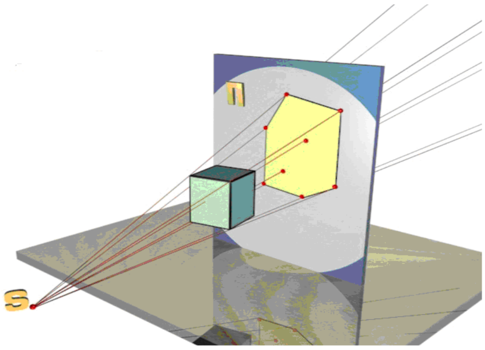

Рис. 1.3 Центральна проекція призми

Побудова проекцій паралельно об'єкту називається прямим завданням нарисної геометрії. Неважко відмітити, що метод центрального проекціювання дозволяє вирішувати її однозначно: кожна точка має на площині **П'** єдину проекцію, оскільки проеціюча пряма перетинається з площиною **П'** в одній точці. Так, точка **А** (рис.1.1) має на площині **П'** єдину проекцію **А'**, відрізок **[ВС]** – єдину проекцію **[В'С']**, будь-яка геометрична фігура – єдину проекцію.

У практичній діяльності необхідно уміти не тільки створювати креслення, але і читати їх, тобто судити по кресленню однозначно про сам предмет. Визначення форми і розмірів об'єкта за його кресленням називається зворотним завданням нарисної геометрії. Одна проекція точки не визначає її положення в просторі, оскільки може бути проекцією будь-якої точки, належною проеціючою прямою. Так, точка **А'** (рис. 1.1) може бути проекцією будь-якої точки, належною прямою **SA**; **[В'С']** на рис.1.2 – проекцією будь-якої лінії, належній проеціючій площині, визначуваною точкою **S** і прямій **ВС**.

Отже, одна проекція об'єкту не дозволяє судити про його форму і розміри, тобто однопроекційне креслення є необоротним.

1.2. Паралельне проекціювання

Якщо за центр проекцій прийняти невласну точку S_∞ простору, то проеціючі прямі **AA_1, BB_1,…** будуть паралельними між собою. Для їх побудови замість відсутній на кресленні точки **S** задають напрям проекціювання **s** (рис.1.4). Такий вид проекціювання називається паралельним, а точки **A_1, B_1, D_1** проекцій **$П_1$** – паралельними проекціями крапок **А, В, D,…** простори. Очевидно, що при паралельному проектуванні, так само як і при центральному, кожна точка простору має на площині **$П_1$** одну проекцію.

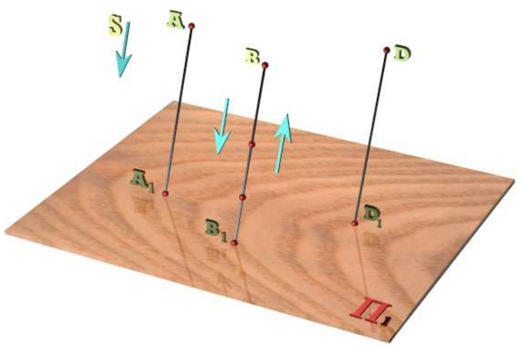

Рис. 1.4

1.3. Інваріанти паралельного проекціювання

1. Проекція точки на площину є точка (рис. 1.4)

$$\mathbf{A \rightarrow A_1.}$$

2. Проекція прямої в загальному випадку пряма: $\mathbf{l \rightarrow l_1}$, (рис.1.5); вона вироджується в точку, якщо пряма паралельно напряму проекціювання:

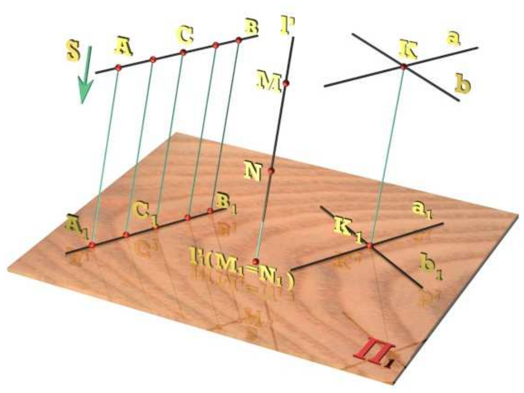

Рис. 1.5

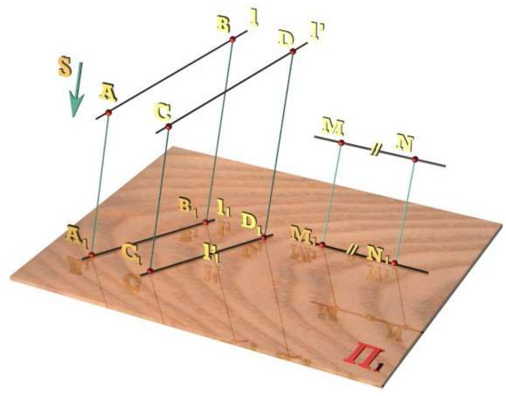

Рис. 1.6

3. Якщо точка належить лінії, то проекція точки належить проекції лінії (рис. 1.6):

$$\mathbf{A \in l \Rightarrow A_1 \in l_1}$$

Слідство з пп. 2 і 3. Для побудови проекції прямої досить побудувати проекції двох точок, що належать їй:

$$\mathbf{A \in l \wedge B \in l \Rightarrow A_1 \in l_1 \wedge B_l \in l_1}$$

4. Точка перетину ліній проектується в точку перетину їх проекцій (рис. 1.5):

$$\mathbf{K = a \cap b \Rightarrow K_1 = a_1 \cap b_1}$$

5. Проекції паралельних прямих паралельні (рис. 1.6):

$$\mathbf{l \parallel l' \Rightarrow l_1 \parallel l_1'}$$

Наслідки:

1) відношення довжин відрізків паралельних прямих рівне відношенню довжин їх проекцій (рис. 1.6):

$$[AB]//[CD] \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|};$$

2) якщо точка, що належить відрізку прямої, ділить його в деякому відношенні, то проекція точки ділить проекцію відрізка в тому ж відношенні (рис. 1.6).

6. Якщо геометрична фігура **Ф** належить площині **Σ,** паралельній площині проекцій (наприклад,$\mathbf{\Pi_1}$), то проекція цієї фігури на площину $\mathbf{\Pi_1}$ конгруентна самій фігурі.

Наприклад, якщо відрізок **MN** паралельний площині проекцій, то його проекція на дану площину конгруентна самому відрізку (рис. 1.6).

7. Проекція геометричної фігури не змінюється при паралельному перенесенні площини проекцій.

1.4. Ортогональне проекціювання

Якщо напрям проекціювання перпендикулярний площині проекцій, паралельне проекціювання називається ортогональним (прямокутним): $\mathbf{s \perp П_1 \Rightarrow (AA_1) \perp П_1}$. В цьому випадку проекція $\mathbf{A_1}$, точки **А** називається ортогональною, або прямокутною (рис. 1.7). Інакше проекціювання називається косокутним.

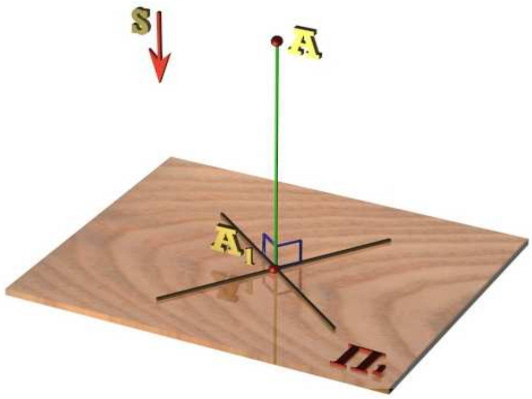

Рис. 1.7

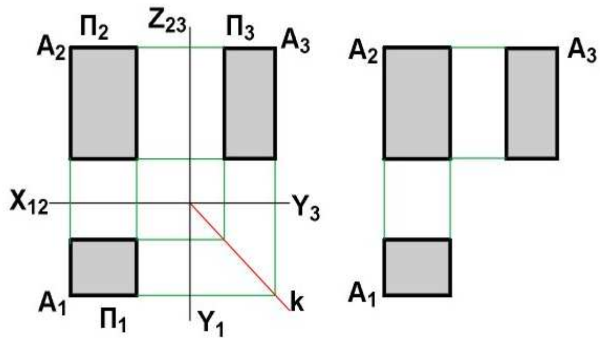

Рис. 1.8

Ортогональне проекціювання, будучи окремим випадком паралельного, значно спрощує побудову проекцій геометричних фігур і є основним при виконанні комплексних креслень технічних форм (рис. 1.8). Розглянуті в попередніх параграфах однопроекційні креслення геометричних фігур є необоротними.

По ним не можна в думках відтворити просторову форму і розміри зображеного об'єкту. Існують різні способи усунення цього недоліку однопроекційних креслень залежно від прийнятого виду проекціювання.

Наприклад, при центральному проекціюванні точку можна проектувати з двох різних центрів (рис. 1.9), при паралельному - за допомогою двох різних напрямів, при ортогональному - на дві пересічні площини. Неважко відмітити, що в кожному з цих випадків виходять дві проекції $\mathbf{A_1}$, і $\mathbf{A'_1}$, точки **А**, що однозначно визначають її положення в просторі.

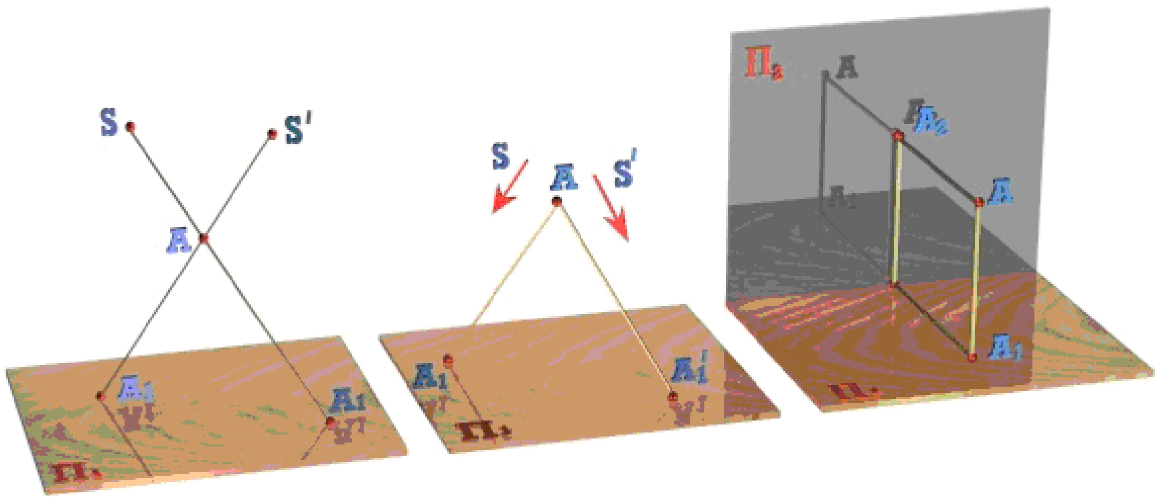

Рис. 1.9

ЛЕКЦІЯ № 2. КОМПЛЕКСНІ КРЕСЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

2.1. Комплексне креслення точки
2.2. Комплексні креслення ліній
2.3. Комплексні креслення прямих ліній

2.1. Комплексне креслення точки

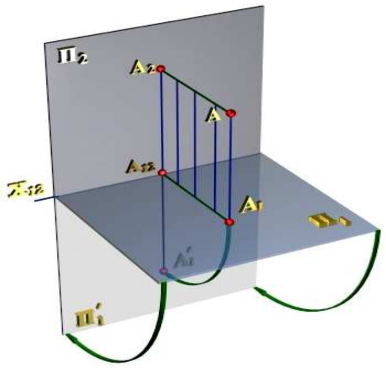

Рис. 2.1

Розглянемо систему двох взаємно перпендикулярних площин **Π_1** и **Π_2** (рис. 2.1). Плоскість **Π_1** розташуємо горизонтально і назвемо горизонтальною площиною проекцій, а площину **Π_2**, перпендикулярну **Π_1**, розташуємо прямо перед собою і назвемо фронтальною площиною проекцій. Лінія **x_{12}** їх перетину називається віссю проекцій. Візьмемо яку-небудь точку **А** (рис. 2.1) і побудуємо її ортогональні проекції **A_1** і **A_2** відповідно на площинах **Π_1** і **Π_2**. Точка **A_1** називається горизонтальною проекцією точки **А**, а точка **A_2** - її фронтальною проекцією.Точка А і її ортогональні проекції **A_1** и **A_2** належать одній площині.

$[(AA_1) \cap (AA_2)]$, = перпендикулярною **Π_1**, **Π_2** і осі **x_{12}.**

Відстань **| AA_1 |** точки **А** до площини **Π_1** називається висотою точки **А**, а її відстань **| AA_2** | до площини **Π_2 – глибиною точки А**.

Просторова модель площин проекцій (рис. 2.1) незручна для практичного використання, оскільки на площині **Π_1** відбувається спотворення форми і розмірів горизонтальної проекції геометричної фігури. Для того, щоб перейти від просторової моделі площин проекцій до більш простої площинної моделі, тобто до плоского креслення, сумістимо площину **Π_1** з площиною **Π_2**, обертаючи її навколо осі **x_{12}** в напрямі, вказаному на рис. 2.1 стрілками. В результаті отримаємо комплексне креслення точки **А**, що складається з комплексу двох її проекцій **A_1** і **A_2**, що належать одній прямій, перпендикулярної осі **x_{12}** (рис. 2.1). Пряма **$(A_1A_2) \perp x_{12}$**, що сполучає дві проекції точки на комплексному кресленні, називається лінією зв'язку. Отримане таким чином комплексне креслення точки буде оборотним, оскільки дві її проекції **A_1** і **A_2** однозначно визначають положення точки **А** в просторі.

У технічній практиці для визначення форми і розмірів предмету застосовується принцип внутрішнього координування, при якому задаються розміри предмету, що характеризують форму і взаємне розташування його крапок, ліній і поверхонь щодо його конструкторських і технологічних баз, а не щодо площин проекцій. Тому в техніці прийнятий безосний спосіб виконання креслень. Площини проекцій при цьому в просторі не фіксуються, вісь проекцій стає невизначеною і на кресленні не наноситься (рис. 2.2, в). Підставою для цього є те, що проекція геометричної фігури не змінюється при паралельному перенесенні площини проекцій (п. 7, розділ 1.3, лекція № 1).

Лінія зв'язку **$[A_1A_2]$** на безосному комплексному кресленні проводиться вертикально. Якщо з яких-небудь причин необхідно зафіксувати площини проекцій **Π_1** і **Π_2**, то на безосному комплексному кресленні наноситься вісь проекцій x_{12} перпендикулярно лініям зв'язку в будь-якому зручному місці між горизонтальною і фронтальною проекціями геометричної фігури.

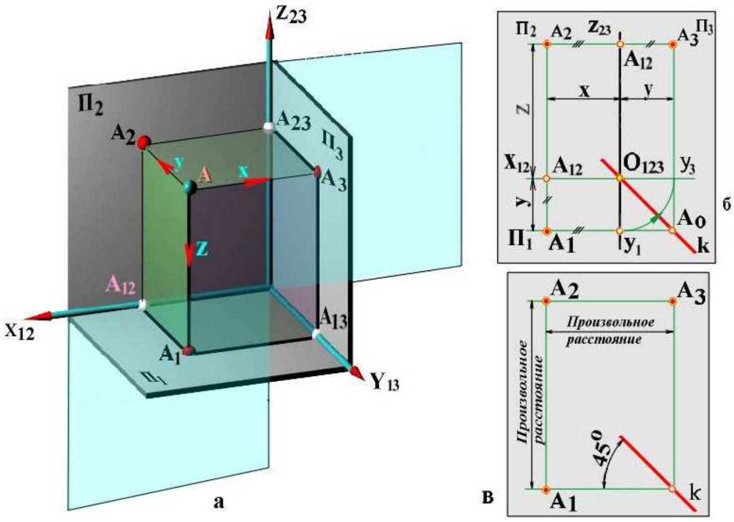

Рис. 2.2

У багатьох випадках для виявлення форми і розмірів предмету доводиться будувати його проекції не на дві, а на більшу кількість площин. Велика частина предметів вимагає побудови трьох проекцій. Для побудови третьої проекції предмету застосовується профільна площина проекцій $\mathbf{\Pi_3}$, перпендикулярна $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Pi_3}$ (рис. 2.2). Ортогональна проекція $\mathbf{A_3}$ точки **А** на профільну площину проекцій називається профільною проекцією точки. Відстань **/АА3/** точки **А** до площини $\mathbf{\Pi_3}$ називається широтою точки **А**.

Очевидно, що дві будь-які проекції точки **А** визначають її положення в просторі (рис. 2.2).

Утворення комплексного креслення точки **А** (рис. 2.2,б) зрозуміло з просторового креслення.

За двома заданими проекціями точки можна побудувати її третю проекцію, користуючись умовами зв'язку між проекціями точки на комплексному кресленні (рис. 2.2 б)

1) горизонтальна і фронтальна проекції точки належать одній вертикальній лінії зв'язку;

2) фронтальна і профільна проекції точки належать одній горизонтальній лінії зв'язку;

3) горизонтальна і профільна проекції точки належать ламаній лінії зв'язку, вершина якого належить постійній прямій **k** креслення (пряма **k** є бісектрисою прямого кута, утвореного ламаною лінією зв'язку).

На безосному комплексному кресленні умови зв'язку між проекціями точки зберігаються (рис. 2.2, в).

Якщо задана система взаємозв'язаних точок **А, В, С,** то за двома проекціями кожної з них можна побудувати третю, якщо на ній є три проекції однієї з них, наприклад точки **А** (рис. 2.3, а). Точка **А** називається при цьому базовою.

Якщо прийняти площини проекцій **$П_1$,$П_2$** і **$П_3$** за координатні площини декартової системи координат, то довжини відрізків, що виражають відстані точки **A** до площини проекцій, віднесені до одиниці довжини **/e/** будуть координатами точки **A** (рис. 2.2, а, б):

$|AA_3| / |e| = x$ - абсциса (широта)

$|A_2| / |e| = y$ - ордината (глибина)

$|A_1| / |e| = z$ - аплікатa (висота).

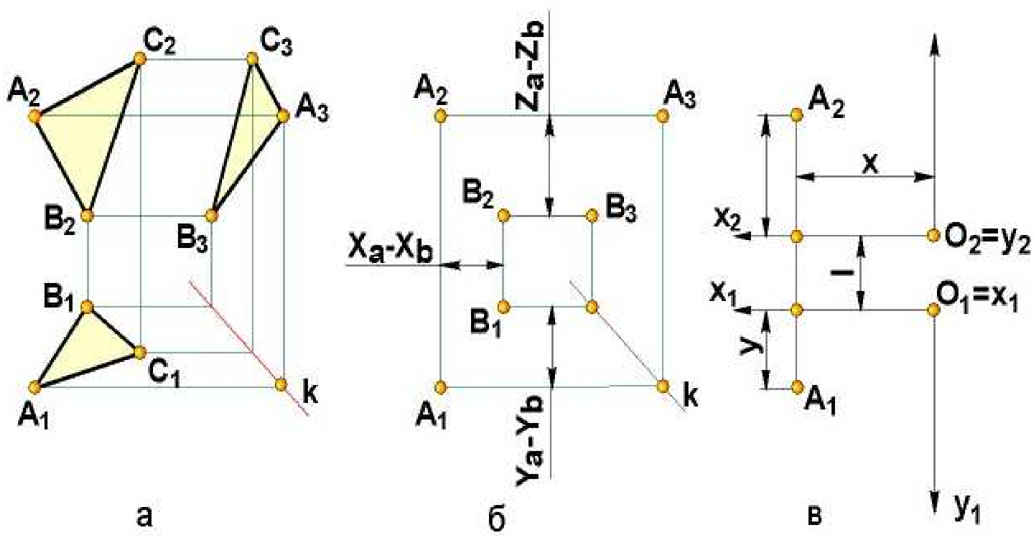

Рис.2.3

У технічних кресленнях за одиницю довжини приймають **$|e| = 1$ мм**. За координатами точки **A(x,y,z)** можна побудувати її проекції, а по заданим проекціям визначити її координати (рис. 2.2, б). При безосному способі зображення координати точки стають не визначеними. В цьому випадку для побудови комплексного креслення точки можна скористатися різницями координат, які не залежать від положення площин проекцій (рис. 2.3, б), або побудувати на ньому проекції координатних осей і віднести точку до системи координат **Oxyz** (рис.2.3, в).

Висновки:

1.Сукупність двох і більш взаємозв'язаних ортогональних проекцій геометричної фігури, розташованих на одній площині креслення, називається комплексним кресленням.

2.Оборотне комплексне креслення повинне містити не менші двох проекцій геометричної фігури.

3. Для того, щоб креслення геометричної фігури було оборотним, воно повинно містити стільки проекцій, щоб кожна її точка мала не менш двох проекцій.

2.2. Комплексні креслення ліній

Лінії серед геометричних фігур займають особливе положення. Крім службового застосування при виконанні зображень і різних графічних побудов, вони дозволяють вирішувати багато наукових і інженерних задач.

Наприклад, за допомогою ліній можна створити наочні моделі багатьох процесів, встановити і досліджувати функціональну залежність між різними параметрами, конструювати поверхні технічних форм і т.п. Лінію можна представити або як межу поверхні, або як слід безперервно рухомої в просторі точки. Оскільки положення точки на лінії визначається однією безперервно змінною величиною (одним параметром), лінія є однопараметричною (одновимірною) безперервною безліччю точок. Для нарисної геометрії другий, так званий кінематичний, спосіб представлення лінії є зручнішим. Існують **прямі, ламані і криві** лінії.

2.3. Комплексні креслення прямих ліній

Пряма є така безліч точок, властивості якої визначаються відомою аксіомою прямої лінії: **"через будь-які дві різні точки проходить одна і лише одна пряма"** і теоремою, яка виходить з аксіоми прямої: **"дві різні прямі можуть мати не більш за одну загальну точку"**.

Прямая загального положення

Пряма може займати в просторі різні положення щодо площин проекцій. Пряма, не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій, називається прямою загального положення. Проекцією прямої лінії в загальному випадку є пряма (п. 2, розділ 1.3). Очевидно, що в системі площин проекцій $\mathbf{П_2/П_1}$ пряма $\mathbf{l}$ буде мати дві проекції: $\mathbf{l_1}$ на $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{l_2}$ на $\mathbf{П_2}$ (рис. 2.4).

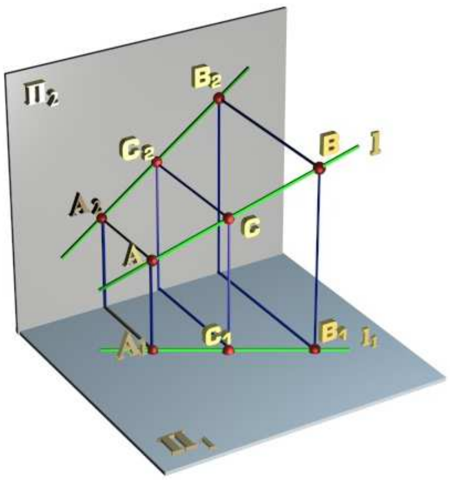

Рис 2.4

Дві проекції прямої загального положення визначають її положення в просторі, оскільки кожна точка прямої має дві проекції.

Для побудови проекції прямої досить побудувати проекції двох її точок (рис. 2.4) на підставі слідства з пп. 2 і 3, разд. 1.3.

Різниця координат двох неспівпадаючих точок **A** і **B**, що належать прямій **1** загального положення, не дорівнює нулю (рис. 2.4):

$$\mathbf{X_A - X_B = a \neq 0,}$$
$$\mathbf{Y_B - Y_A = c \neq 0,}$$
$$\mathbf{Z_B - Z_A = b \neq 0.}$$

Безліч точок, що складається з двох різних точок прямої і всіх точок, що знаходяться між ними, називається відрізком прямої.

Визначення довжини відрізка прямої способом прямокутного трикутника

На рис. 2.5 показана просторова схема рішення даної задачі, а на рис. 2.6 приведені необхідні побудови на комплексному кресленні. Побудуємо ортогональну проекцію $\mathbf{[A_1B_1]}$ відрізка $\mathbf{AB}$ на площину $\mathbf{П_1}$.

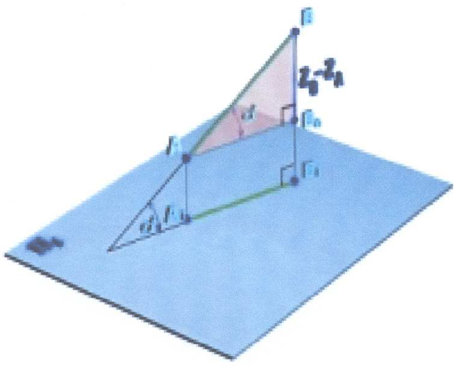

Рис. 2.5

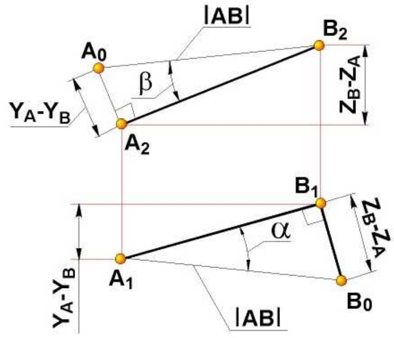

Рис. 2.6

Проведемо **[AB_0]** ||[A_1B_1]. Трикутник **ABB_0** - прямокутний. Довжина одного його катета дорівнює довжині горизонтальної проекції відрізка **[AB],** а другого - різниці висот кінців відрізка **[AB].**

$$|AB_0| = |A_1B_1| \; ; \; |BB_0| = |BB_1| - |AA_1| = Z_B - Z_A$$

Відрізок **[AB]** є гіпотенузою цього трикутника, а < - кутом нахилу **[AB]** до горизонтальної площини проекцій. Трикутник, конгруентний даному, можна побудувати на комплексному кресленні (рис. 2.6).

Прийнявши за один катет **[A_1B_1],** будуємо прямокутний трикутник, другим катетом якого є відрізок **[B_1B_0] = Z_B - Z_A**. Довжина гіпотенузи | **A_1B_0** | цього трикутника рівна | **AB** |, а < $\alpha = B_1A_1B_0$ - величині кута нахилу його до площини **Π_1**. Довжина відрізка може бути визначена як довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, одним катетом якого є фронтальна проекція **[A_2B_2]**, а другим - різниця глибин точок **A** і **B** (ця побудова також показана на рис. 2.6). Доведіть це самостійно.

Подумайте, що визначає позначений на малюнку кут β ?

Приналежність точки прямої лінії

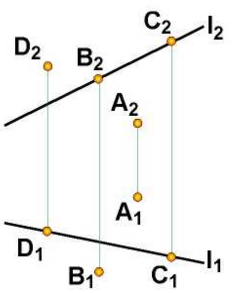

Рис. 2.7

Точка може належати прямій і знаходитися зовні прямої. Якщо точка **C** (рис. 2.7) належить прямій **l**, то проекції **C_1** і **C_2** точки **C** належать однойменним проекціям прямої **l**:

$$C \in l \Rightarrow C_1 \in l_1 \wedge C_2 \in l_2.$$

Якщо точка не належить прямою **1**, то, принаймні, одна з її проекцій не належить однойменній проекції прямої. На рис.2.7 точки **A**, **B** і **D** не належать прямій **l**, причому точка **D** розташована над прямою, а точка **B** - перед прямій.

Прямі приватного положення

Прямі рівня

Пряма, паралельна одній з площин проекцій, називається **прямою рівня**.

Горизонталь - пряма, паралельна Π_1 (рис. 2.8). На рис. 2.9 показано комплексне креслення горизонталі. Горизонталь позначається буквою **h**.

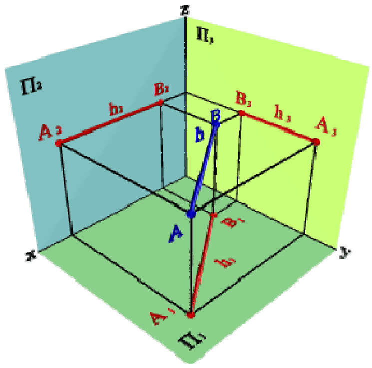

Рис. 2.8

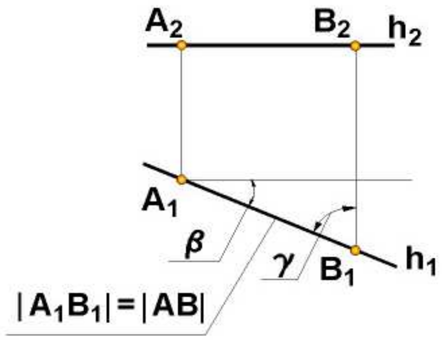

Рис. 2.9

Її горизонтальна проекція $\mathbf{h_1}$, займає положення, відповідне положенню самої горизонталі в просторі, а фронтальна проекція перпендикулярна лініям зв'язку, оскільки $\mathbf{Z_B - Z_A = 0}$. Відрізок **[AB]** горизонталі **h** і кут нахилу її до площини $\mathbf{П_2}$ проектуються на площину $\mathbf{П_1}$ без спотворення.

Фронталь - пряма, паралельна $\mathbf{П_2}$ (рис. 2.10, рис. 2.11).

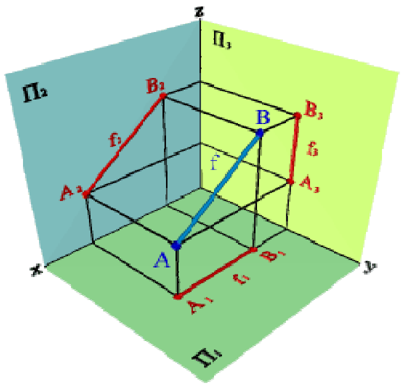

Рис. 2.10

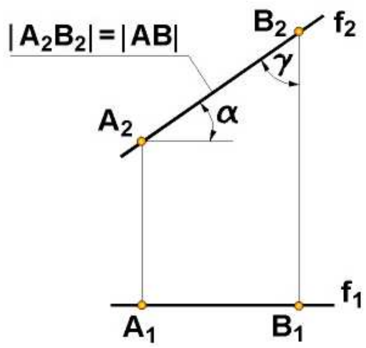

Рис. 2.11

Фронталь позначається буквою **f**, її фронтальна проекція $\mathbf{f_2}$ займає положення, відповідне положенню самої фронталі в просторі, а її горизонтальна проекція перпендикулярна лініям зв'язку, оскільки $\mathbf{Y_в - У_а = 0}$. Відрізок **[AB]** фронталі **f** і кут α нахилу її до площини $\mathbf{П_1}$ проектуються на площину $\mathbf{П_2}$ без спотворення.

Профільна пряма - це пряма, паралельна $\mathbf{П_3}$ (рис. 2.12, рис. 2.13). Профільна пряма позначається буквою **p**. Її профільна проекція займає положення, відповідне положенню в просторі самої профільної прямої, а

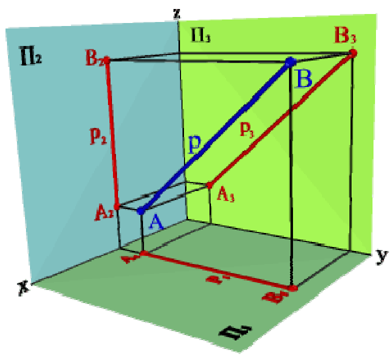

Рис. 2.12

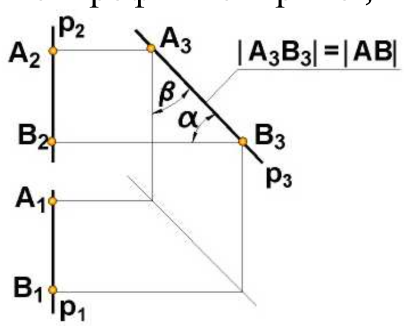

Рис. 2.13

горизонтальна і фронтальна проекції співпадають з однією і тією ж вертикальною лінією зв'язку, оскільки $\mathbf{X_A - X_B = 0}$. Відрізок **[AB]** профільної прямої **p** і кути α і β нахилу її відповідно до площин $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ проектуються на площину $\mathbf{П_3}$ без спотворення.

Положення горизонталі **h** і фронталі **f** в просторі визначається завданням на кресленні двох їх проекцій $\mathbf{h_1}$ і $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{f_1}$ і $\mathbf{f_2}$. Дві проекції $\mathbf{p_1}$ і $\mathbf{p_2}$ профільної прямої **p** не визначають її положення в просторі, оскільки цим проекціям відповідає незліченна безліч прямих, що належать профільній площині, що проходить через задану пряму. За аналогією з цим горизонталь не визначається двома своїми проекціями $\mathbf{h_2, h_3}$, а фронталь - $\mathbf{f_1}$ і $\mathbf{f_3}$. Тому для визначення прямої **p** необхідно задати дві проекції $\mathbf{p_2, p_3}$ або $\mathbf{p_1, p_3}$ або ж задати на прямій **p** дві точки **A** і **B** (рис.2.10) - $\mathbf{p_2}(\mathbf{A_2B_2})$ і $\mathbf{p_1}(\mathbf{A_1B_1})$. Отже, двохпроекційне комплексне креслення лінії рівня обернемо тільки в тому випадку, якщо воно містить проекцію прямої не паралельну ій площину проекцій.

ЛЕКЦІЯ № 3. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

(простих)

Всі поверхні можна розділити на плоскі (площини), багатогранні і криві. Простою поверхнею є площина

Площина загального положення

Площина є така безліч точок, основні властивості якої виражаються наступними аксіомами:

1. Через три точки, що не належать одній прямій, проходить одна і лише одна площина. Наслідки:

1) через пряму і не належну їй точку можна провести одну і лише одну площину;

2) через дві пересічні прямі можна провести одну і лише одну площину;

3) через дві різні паралельні прямі можна провести тільки одну площину.

2. Пряма, що проходить через будь-які дві різні точки площини, належить цій площині (якщо дві точки прямої належать площині, то і всі точки цієї прямої належать площині).

3. Якщо дві різні площини мають загальну точку, то їх перетин є пряма (дві площини перетинаються по прямій лінії).

Площина може займати різні положення щодо площин проекцій. Площина, не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій, називається площиною загального положення.

Задати площину на кресленні проекціями безлічі її точок практично неможливо, оскільки проекції точок площини покриють площини проекцій і ми не отримаємо на них ніяких зображень. Тому площину на кресленні задають проекціями тих, геометричних фігур, що їй належать та які однозначно визначають її положення в просторі і дозволяють побудувати будь-яку її точку. На підставі аксіоми 1 і наслідків з неї площина загального положення на кресленні можна задати (рис. 3.1. а, б,и, в, г, д):

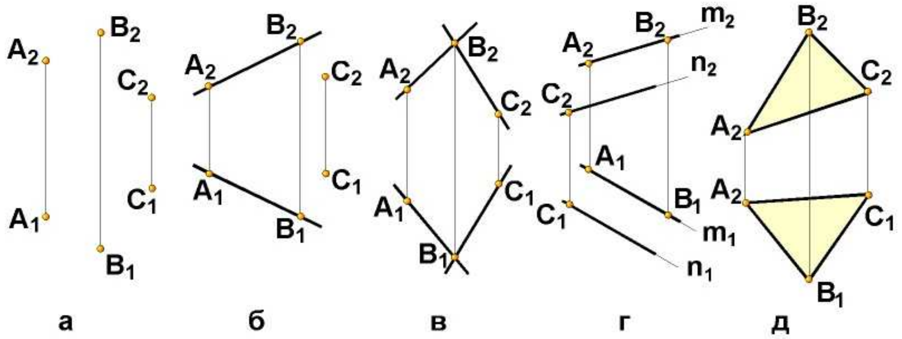

Рис. 3.1

а) проекціями трьох точок, що не належать одній прямій лінії;
б) проекціями прямої і не належної ній точки;
в) проекціями двох пересічних прямих;
г) проекціями двох різних паралельних прямих;
д) проекціями плоскої фігури.

На рис. 3.2 приведені тривимірна модель і комплексне креслення площини загального положення.

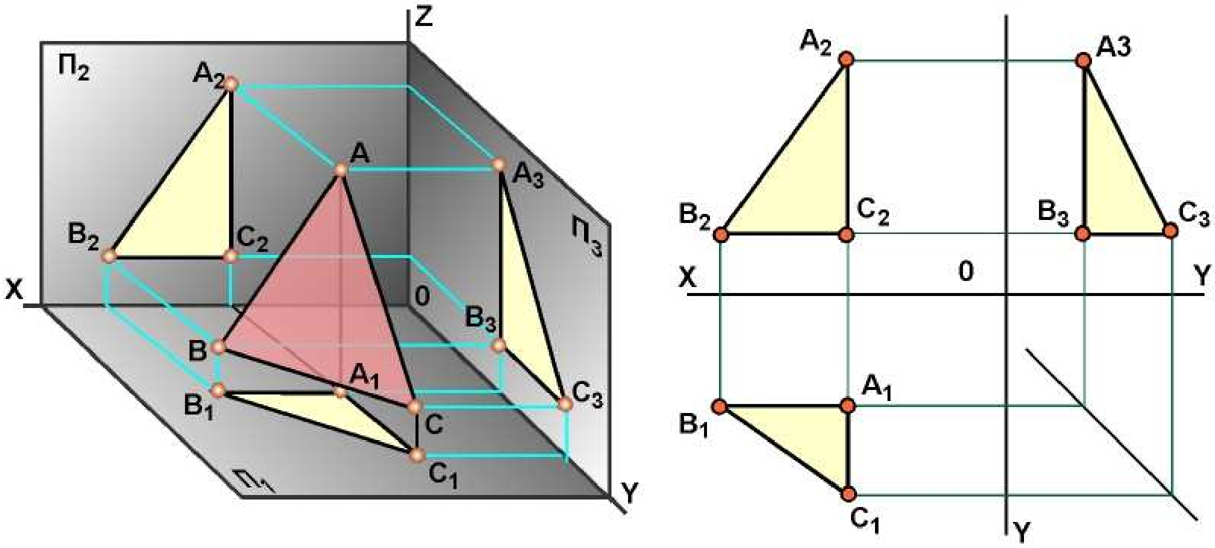

Рис. 3.2

ЛЕКЦІЯ № 4. КОМПЛЕКСНІ КРЕСЛЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

4.1. Багатогранні поверхні. Многогранники
4.2. Криві поверхні
4.3. Аксонометричні проекції
4.3.1. Основна теорема аксонометрії (теорема Польке)
4.3.2. Стандартні аксонометричні проекції
4.3.3. Коло в аксонометрії
4.3.4. Побудова аксонометричних зображень

4.3.4.1. Побудова аксонометричних проекцій плоских деталей
4.3.4.2. Побудова аксонометричних проекцій 3-вимірних об’єктів
4.3.4.3. Побудова аксонометричних проекцій ліній перетину кривих поверхонь

4.1. Багатогранні поверхні. Многогранники.

Поверхня, утворена частинами попарно пересічних площин, називається **багатогранною**. На рис. 4.1 зображені деякі види багатогранних поверхонь.

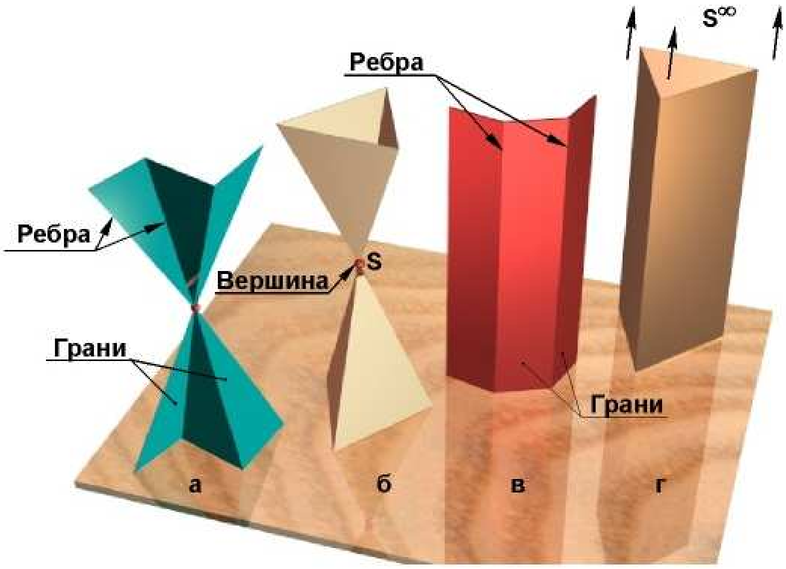

Рис. 4.1

Їх елементами є грані, ребра і вершини. Відсіки площин, створюючі багатогранну поверхню, називаються гранями, лінії перетину суміжних граней - ребрами, точки перетину не менше чим трьох граней - вершинами.

Якщо кожне ребро багатогранної поверхні належить одночасно двом її граням, її називають **замкнутою** (рис. 4.1, б, г), інакше - **незамкнутою** (рис. 4.1, а, в)

Багатогранна поверхня називається **пірамідальною**, якщо всі її ребра перетинаються в одній точці - вершині (рис. 4.1, а). Пірамідальна поверхня має дві необмежені підлоги. Багатогранна поверхня називається **призматичною**, якщо всі її ребра паралельні між собою (рис. 4.1, г).

Геометричне тіло, з усіх боків обмежене плоскими багатокутниками, називається **многогранником**. Простими многогранниками є піраміди і призми (рис. 4.2)

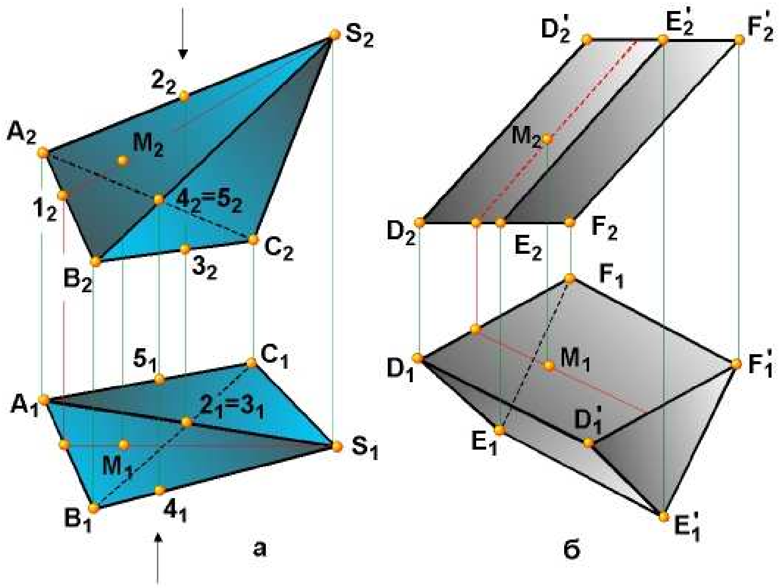

Рис. 4.2

4.2. Криві поверхні

Загальні поняття і визначення

Криві поверхні широко застосовуються в різних областях науки і техніки при створенні контурів різних технічних форм або як об'єкти інженерних досліджень. Існують три способи завдання кривих поверхонь:

1. Аналітичний - за допомогою рівнянь;

2. За допомогою каркаса;

3. Кінематичний, тобто переміщенням ліній в просторі.

Складанням рівнянь поверхонь займається аналітична геометрія; вона розглядає криву поверхню як безліч точок, координати яких задовольняють деякому рівнянню. На рис. 4.3 приведений приклад поверхні заданої аналітично (системою рівнянь алгебри).

При каркасному способі завдання крива поверхня задається сукупністю деякої кількості ліній, що належать поверхні. Лінії, створюючи каркас, як правило, беруть сімейство ліній, що виходять при перетині поверхні поряд паралельних площин. Цей спосіб застосовується при проектуванні кузовів автомобілів, в літако- і суднобудуванні, в топографії і т. ін.

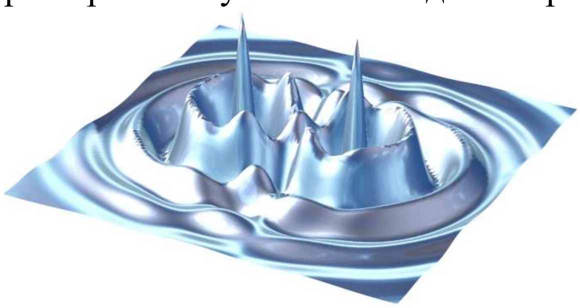

Рис 4.3

Нарисна геометрія вивчає **кінематичні способи** створення і завдання кривих поверхонь. При цьому кожна крива поверхня розглядається як сукупність послідовних положень лінії твірної **l**, що переміщується в просторі за певним законом. Лінія твірної при своєму русі може залишатися незмінною, а може і міняти свою форму.

Такий спосіб утворення поверхні називається кінематичним, а сама

поверхня - кінематичною.

Закон переміщення лінії твірної, як правило, задається за допомогою направляючих ліній і алгоритму переміщення, що утворюються за тими, що направляють.

На кресленні кінематична крива поверхня задається за допомогою її визначника.

Визначником поверхні називають сукупність умов, необхідних і достатніх для завдання поверхні в просторі.

4.3. Аксонометричні проекції

Аксонометричні зображення широко застосовуються завдяки добрій наочності і простоті побудов.

Слово «аксонометрія» в перекладі з грецького означає вимірювання за осями. Аксонометричний метод може поєднуватися і з паралельним, і з центральним проектуванням за умови, що предмет проектується разом з координатною системою.

Суть методу паралельного аксонометричного проектування полягає в тому, що предмет відносять до деякої системи координат і потім проектують паралельними променями на площину разом з координатною системою.

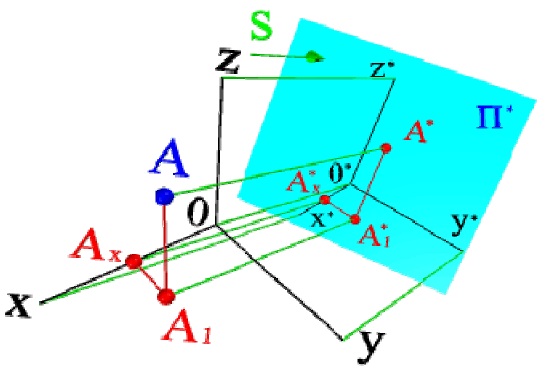

Рис. 4.4

На рис 4.4 показана точка ***A*,** віднесена до системи прямокутних координат **xyz**. Вектор ***S*** визначає напрям проектування на площину проекцій **П*.**

Аксонометричну проекцію A_1* горизонтальної проекції точки А прийнято називати вторинною проекцією.

Спотворення відрізків осей координат при їх проекціюванні на ***П'*** характеризується так званим коефіцієнтом спотворення.

Коефіцієнтом спотворення називається відношення довжини проекції відрізка осі на картині до його дійсної довжини.

Так по осі **x*** коефіцієнт спотворення складає ***u=0*x*/0x***, а по осі **y*** і z*, відповідно, **ʋ=0*y*/0y** и **ω=0*z*/0z**.

Залежно від відношення коефіцієнтів спотворення аксонометричні проекції можуть бути:

Ізометричними, якщо коефіцієнти спотворення за всіма трьома осями рівні між собою; в цьому випадку **u=ʋ=ω.**

Диметричними, якщо коефіцієнти спотворення за двома будь-якими осями рівні між собою, а за третьою – відрізняється від перших двох.

Триметричними, якщо всі три коефіцієнти спотворення за осями різні.

Аксонометричні проекції розрізняються також і за тим кутом **φ**, який утворюється проектуючим променем з площиною проекцій. Якщо **φ ≠ 90°**, то аксонометрична проекція називається **косокутною**, а якщо **φ = 90°**– прямокутною.

4.3.1. Основна теорема аксонометрії (теорема ПОЛЬКЕ)

Розглянувши загальні відомості про аксонометричні проекції, можна зробити такі висновки:

- аксонометричні креслення оборотні;

- аксонометрична і вторинна проекції точки цілком визначають її положення в просторі.

Аксонометричні проекції оборотні, якщо відома аксонометрія трьох головних напрямів вимірювань фігури і коефіцієнти спотворення у цих напрямах.

Аксонометричні проекції фігури є її проекціями на площині довільного положення при довільно вибраному напрямі проекціювання.

Очевидно, можливо і зворотнє. На площині можна вибрати довільне положення осей з довільними аксонометричними масштабами.

У просторі завжди можливе таке положення натуральної системи прямокутних координат і такий розмір натурального масштабу за осями, паралельною проекцією яких є дана аксонометрична система.

Німецький вчений Карл Польке (1810-1876) сформулював основну теорему аксонометрії: **три відрізки прямих довільної довжини, що лежать в одній площині і виходять з однієї точки під довільними кутами один до одного, представляють паралельну проекцію трьох рівних відрізків, відкладених координатних осях від початку.**

Згідно цієї теореми, **будь-які три прямі в площині**, витікаючі з однієї точки і не співпадаючі між собою, можна прийняти за аксонометричні осі. Будь-які відрізки довільної довжини на цих прямих, відкладені від точки їх перетину, можна прийняти за аксонометричні масштаби. Ця система аксонометричних осей і масштабів є паралельною проекцією деякої прямокутної системи координатних осей і натуральних масштабів.

У практиці побудови аксонометричних зображень зазвичай застосовують лише деякі певні комбінації напрямів аксонометричних осей і аксонометричних масштабів: прямокутна ізометрія і диметрия, косокутна фронтальна диметрия, кабінетна проекція та ін.

4.3.2. Стандартні аксонометричні проекції

Згідно з ДСТ 2.317-69, із прямокутних аксонометричних проекцій рекомендується застосовувати прямокутні **ізометрію** і **диметрію.**

Між коефіцієнтами спотворення і кутом **φ**, створеним напрямом проекціювання і картинною площиною, існує така залежність:

$$\mathbf{u^2+\upsilon^2+\omega^2=2+ctq^2\varphi,}$$

якщо **φ=90°**, то $\mathbf{u^2+\upsilon^2+\omega^2=2}$,

У ізометрії $\mathbf{u=\upsilon=\omega}$ і, отже, $\mathbf{3u^2=2}$, звідки $\boldsymbol{u}=\sqrt{2/3}\approx \mathbf{0,82}$.

Таким чином, в прямокутній ізометрії розміри предмету за всіма трьома вимірюваннями скорочуються на 18 %. ДСТ рекомендує ізометричну проекцію будувати без скорочення за осями координат (рис.4.5), що відповідає збільшенню зображення проти оригіналу в 1,22 разу.

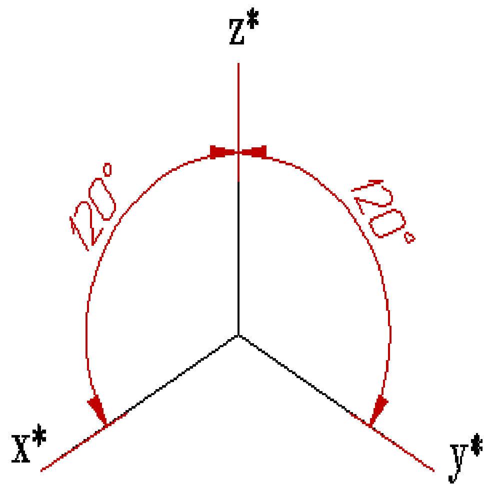

Рис. 4.5

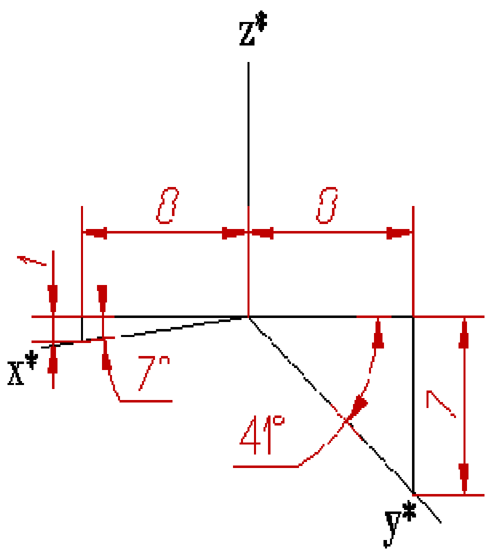

Рис. 4.6

При побудові прямокутної диметричної проекції скорочення довжин по осі **y'** (рис.4.6) приймають удвічі більше, ніж за двома іншими, тобто вважають, що $\mathbf{u=\omega}$, а $\mathbf{\upsilon=0,5u}$.
тоді $\mathbf{2u^2+(0,5u)^2=2}$, звідки $\mathbf{u^2=8/9}$ і $\mathbf{u\approx 0,94}$, а $\mathbf{\upsilon=0,47}$.

У практичних побудовах від таких дробних коефіцієнтів зазвичай відмовляються, вводячи масштаб збільшення, визначуваний співвідношенням 1/0,94=1,06, і тоді коефіцієнти спотворення по осях **x'** і **z'** рівні одиниці, а по осі **y'** удвічі менші $\upsilon=0,5$.

З косокутних аксонометричних проекцій ДСТом передбачено застосування фронтальної і горизонтальної ізометрії і фронтальної диметрії (останню ще називають кабінетною проекцією).

4.3.3 Коло в аксонометрії

При паралельному проекціюванні кола на яку-небудь площину ***П**** отримуємо його зображення в загальному випадку у вигляді еліпса (рис. 4.7).

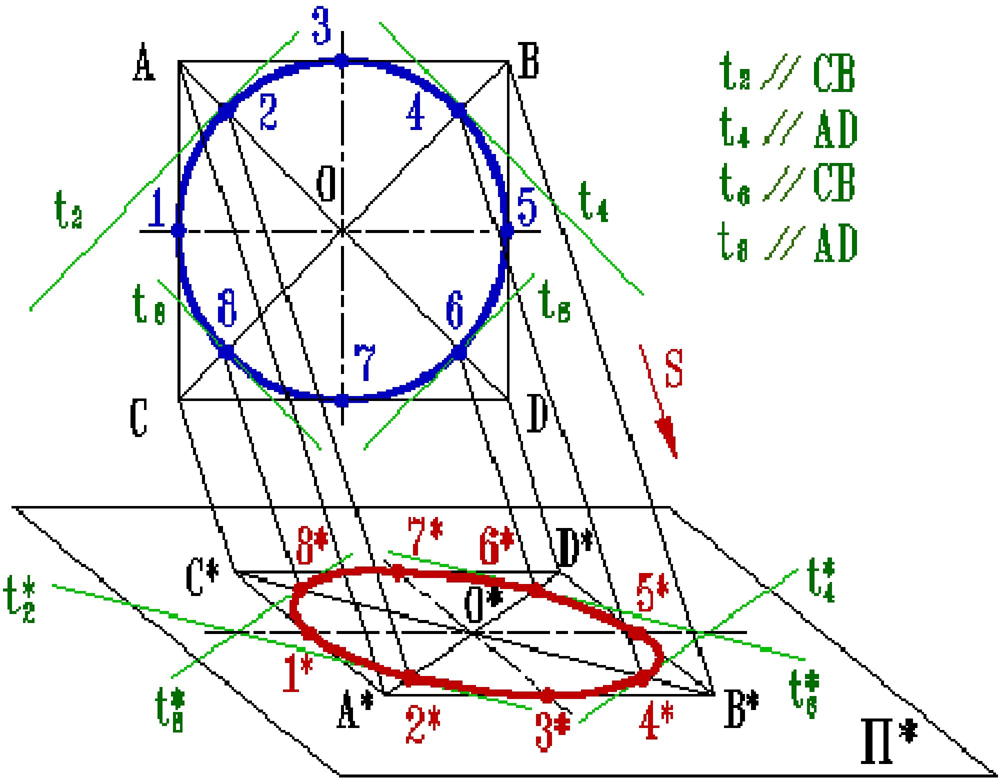

Рис. 4.7

Як би не була розташована площина кола, спочатку доцільно побудувати паралелограм **A*B*C*D***– паралельну проекцію квадрата **ABCD**, описаного біля даного кола, а потім за допомогою восьми точок і восьми дотичних вписати в нього еліпс.

Точки **1, 3, 5 і 7** – середини сторін паралелограма. Точки **2, 4, 6 і 8** розташовані на діагоналях так, що кожна з них ділить напівдіагональ у співвідношенні 3:7.

Дійсно, на основи властивостей параллельного проекціювання можно записати, що **A2/1O=A*2*/2*O*,** що **A1/1O=(r√2-r)/r≈3/7.**

З восьми дотичних до еліпса перші чотири – це сторони паралелограма, а решта t_2, t_4, t_6,t_8– прямі, паралельні його діагоналям.

Так дотична t_2***** до еліпса паралельна діагоналі **C*D***, Пояснюється це тим, що t_2***** і **C*D*** є проекціями двох паралельних прямих t_2 **і CD**.

Графічні побудови, передуючі викреслюванню самого еліпса, доцільно виконувати в наступній послідовності (рис. 4.8):

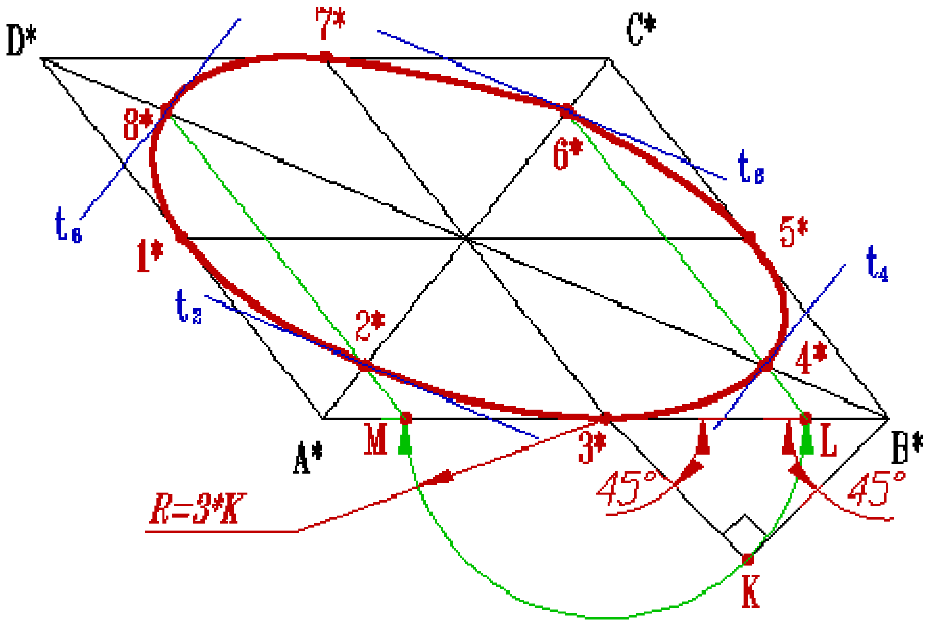

Рис. 4.8

1. Побудувати аксонометричну проекцію квадрата - паралелограм **A*B*C*D*** і провести діагоналі **A*C*** і **B*D*;**
2. Відзначити середини сторін паралелограма – точки **1*, 3*, 5* і 7*** ;
3. На відрізку **3*B***, як на гіпотенузі, побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник **3*KB*;**
4. З точки **3*** радіусом **3*K** описати півколо, яке перетне **A*B*** в точках **L і M**; ці точки ділять відрізок **3*A*** і рівний йому відрізок **3*B*** відносно **3:7** ;
5. Через точки **L** і **M** провести прямі, паралельні бічним сторонам паралелограма, і відзначити точки **2*, 4*, 6* і 8*** розташовані на діагоналях;
6. Побудувати дотичні до еліпса в знайдених точках. Дотичні $\mathbf{t_2}$ і $\mathbf{t_6}$ паралельні **BD,** а дотичні $\mathbf{t_4}$ і $\mathbf{t_8}$ паралельні **AC**.
7. Отримавши вісім точок і стільки ж дотичних, можна з достатньою точністю накреслити еліпс.

ДСТ 2.317-69 визначає положення кіл, що лежать в площинах, паралельних площинам проекцій для прямокутної ізометричної проекції (рис. 4.9) і для прямокутної диметрії (рис. 4.10).

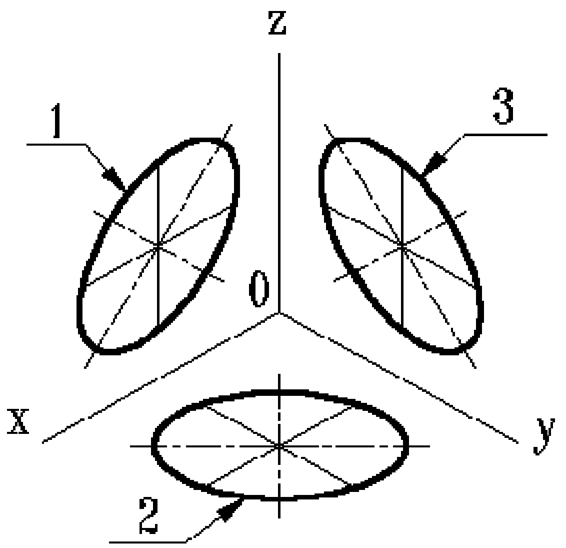

Рис. 4.9

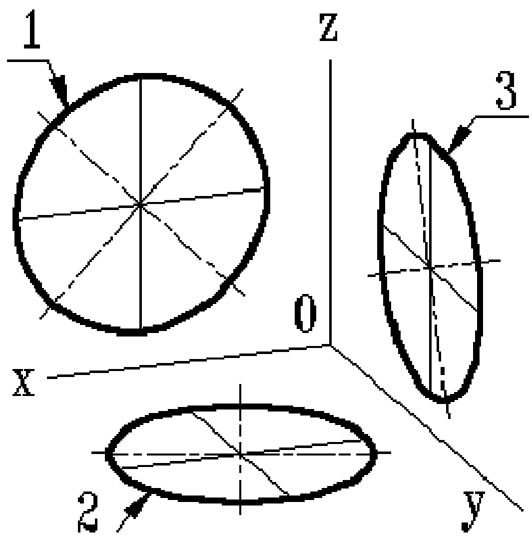

Рис. 4.10

Якщо ізометричну проекцію виконують без спотворення за осями ***x, y, z***, то велика вісь еліпсів 1,2,3 рівна 1,22, а мала вісь - 0.71 діаметру кола.

Якщо ізометричну проекцію виконують із спотворенням за осями ***x, y, z***, то велика вісь еліпсів 1, 2, 3 рівна діаметру кола, а мала - 0.58 діаметру кола.

Якщо диметричну проекцію виконують без спотворення за осями ***x* і z**, то велика вісь еліпсів 1, 2, 3 дорівнює 1,06 діаметру кола, а мала вісь еліпса 1 - 0.95, еліпсів 2 і 3 - 0.35 діаметру кола.

Якщо диметричну проекцію виконують із спотворенням за осями ***x* і z**, то велика вісь еліпсів 1, 2, 3 дорівнює діаметру кола, а мала вісь еліпса 1 - 0.9, еліпсів 2 і 3 - 0,33 діаметру кола.

1- еліпс (велика вісь розташована під кутом 90° до осі ***y***); 2- еліпс (велика вісь розташована під кутом 90° до осі ***z***); 3-еліпс (велика вісь розташована під кутом 90° до осі ***x***).

4.3.4. Побудова аксонометричних зображень

Перехід від ортогональних проекцій предмету до аксонометричного зображення рекомендується здійснювати в такій послідовності (рис. 4.11):

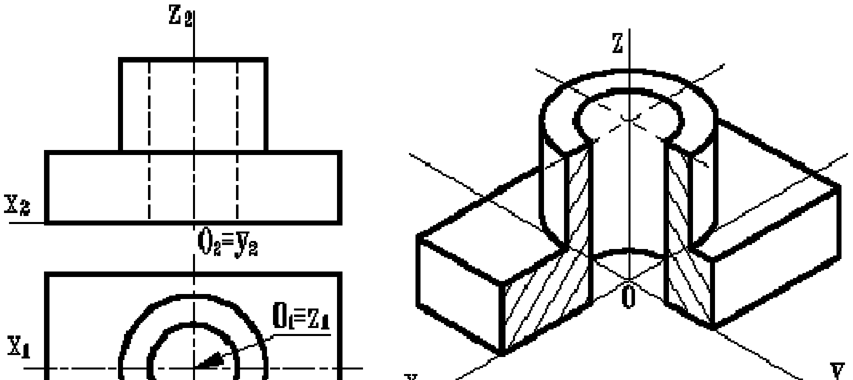

Рис. 4.11

1. На ортогональному кресленні розмічають осі прямокутної системи

координат, до якої і відносять даний предмет. Осі орієнтують так, щоб вони допускали зручне вимірювання координат точок предмету. Наприклад, при побудові аксонометрії тіла обертання одну з координатних осей доцільно сумістити з віссю тіла.
2. Будують аксонометричні осі з таким розрахунком, щоб забезпечити якнайкращу наочність зображення і видимість тих або інших точок предмету.
3. За однією з ортогональних проекцій предмету креслять вторинну проекцію.
4. Створюють аксонометричне зображення, для наочності роблять виріз чверті.

ДСТ 2.317-69 визначає умовності і способи нанесення розмірів при побудові аксонометричного зображення, основну увагу слід звернути на таке:

Лінії штрихування перетину в аксонометричних проекціях наносять паралельно одній з діагоналей проекцій квадратів, що лежать у відповідних координатних площинах, сторони яких паралельні аксонометричним осям, рис. 4.12а,б.

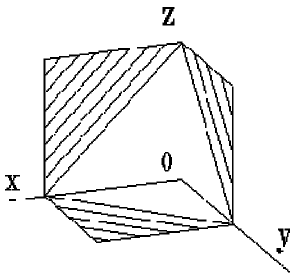

Рис. 4.12,а

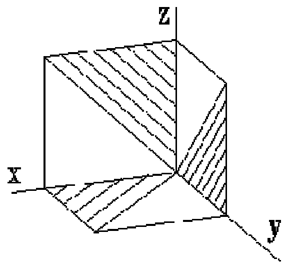

Рис. 4.12,б

При нанесенні розмірів виносні лінії проводять паралельно аксонометричним осям, розмірні лінії – паралельно вимірюваному відрізку.

У аксонометричних проекціях спиці маховиків і шківів, ребра жорсткості і подібні елементи штрихують.

4.3.4.1. Побудова аксонометричних проекцій плоских деталей

Побудова зображень плоских багатокутників зводиться до побудови аксонометричних проекцій їх вершин, які з'єднують між собою прямими лініями. У вигляді прикладу розглянемо побудову п'ятикутника, зображеного на рис. 4.13

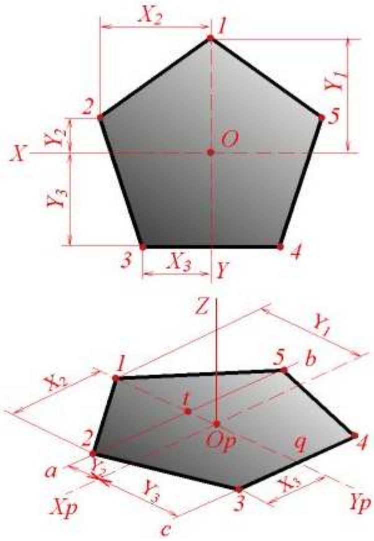
Рис. 4.13

Лінії **X**, **Y** приймемо за координатні осі. Проводимо ізометричні осі **Xp** і **Yp** (рис. 4.13). Для побудови зображення точки **1** достатньо на осі **Yp** відкласти відрізок **Op-1**, рівний за величиною координаті $\mathbf{Y_1}$. Потім відкладаємо в той же бік від точки **Op** відрізок **Op-t**, рівний координаті $\mathbf{Y_2}$, і через точку **t** проводимо пряму **ab**, паралельну осі **Xp**. Координати $\mathbf{X_2}$ вершин **2** і **5** п'ятикутника однакові за величиною, але різні за знаками; тому на на ізометричному зображенні відкладаємо в обидва боки від точки **t** відрізки $\mathbf{t-2 = t-5 = X_2}$.

Сторона **3-4** п'ятикутника паралельна осі **X**. Відклавши від точки **q** по осі **Yp** відрізок **q-Op**, рівний координаті $\mathbf{Y_3}$, проводимо пряму **cd**, паралельну осі **Xp**, і відкладаємо на ній відрізки

q –3 = q –4 = $\mathbf{X_3}$**.** З'єднавши точки **1, 2, 3, 4, 5** прямими лініями, отримуємо аксонометричну проекцію п'ятикутника.

Побудова аксонометричних проекцій плоскою кривою зводиться до побудови проекцій ряду її точок і з'єднання їх в певній послідовності. На рис. 4.14 показана побудова еліпса, розташованого в площині координатних осей **X, Y.**

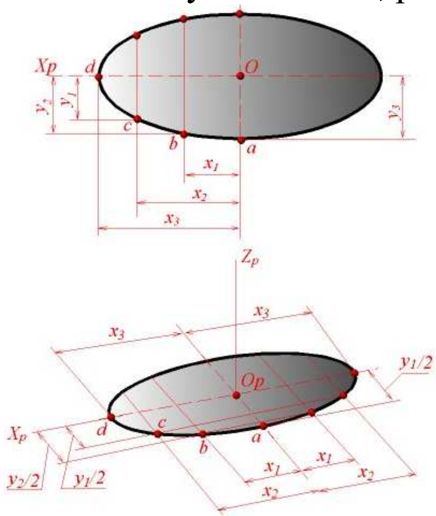

Рис. 4.14

На еліпсі намічаємо ряд крапок і визначаємо їх прямокутні координати **X** та **Y**. Провівши аксонометричні осі, відкладаємо від точки **Op** уздовж осі **Xp** відрізки, рівні за величиною координатам **X** намічених крапок, а уздовж осі **Yp** - відрізки, рівні за величиною половині координат **Y** (показана побудова крапок **a, b, з, d**). Через кінці відрізків проводимо прямі, паралельні осям **Xp, Yp**; на їх перетині отримуємо аксонометричні проекції відповідних крапок, які з'єднуємо плавною лінією.

4.3.4.2. Побудова аксонометричних проекцій 3-вимірних об'єктів

Побудова проекцій многогранників зводиться до побудови їх вершин і ребер. Для призми зручніше починати з побудови вершин повністю видимої основи. На рис. 4.15 показана шестикутна призма, висота якої співпадає з віссю **Z**, а верхня основа розташована в площині осей **X** і **Y**.

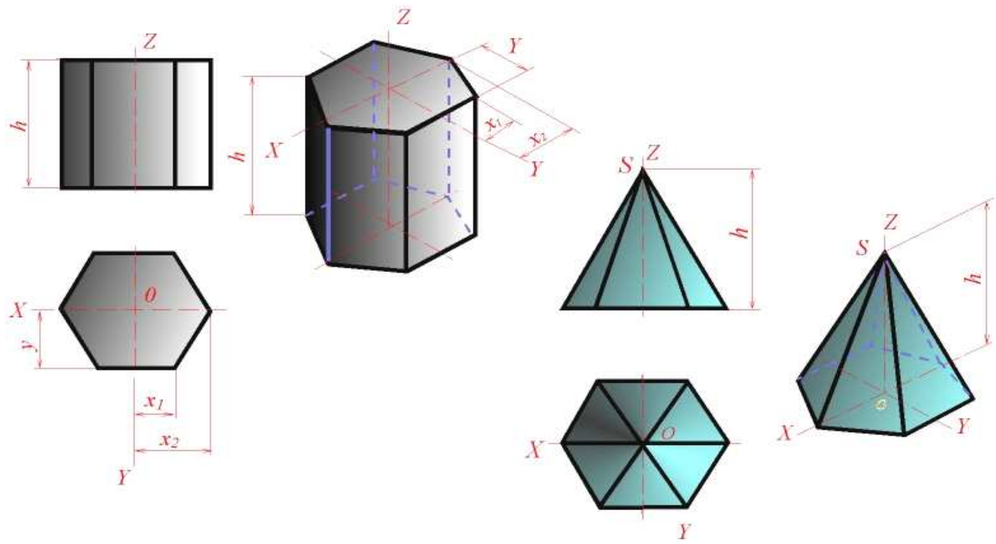

Рис. 4.15

Ізометрична проекція цієї основи будується точно так, як і проекція п'ятикутника на рис. 4.11. Хід побудови зрозумілий з рис. 4.15.

Оскільки довжина всіх бокових ребер призми рівна висоті призми **h**, то для побудови нижньої основи з вершин верхньої основи проведені прямі, паралельні осі **Zp**, і на них відкладені відрізки, рівні **h**. Кінці відрізків з'єднані прямими лініями.

Побудова аксонометричної проекції піраміди, зображеної на рис. 5.12, слід почати з побудови основи, а потім з точки **Op** відкласти на осі **Zp** висоту піраміди і отриману вершину піраміди **Sp** з'єднати з вершинами основи.

4.3.4.3. Побудова аксонометричних проекцій ліній перетину кривих поверхонь

Проекцію лінії перетину поверхонь можна будувати або за координатами ряду її точок, узятих з креслення проектованого предмету, або безпосередньо на аксонометричному зображенні, використовуючи для побудови допоміжні поверхні.

Слід, по можливості, підбирати такі допоміжні поверхні, які із заданими поверхнями дають на кресленні прості для побудови лінії перетину.

Так, при побудові лінії перетину циліндрів допоміжні площини слід проводити паралельно прямолінійним створюючим циліндрових поверхонь. На рис. 4.16 площина **R** перетинає основи циліндрів по прямим **EpFp** і **QpHp**, а циліндрові поверхні - по створюючим, таким, що проходять через точки **Ep, Fp, Qp, Hp**.

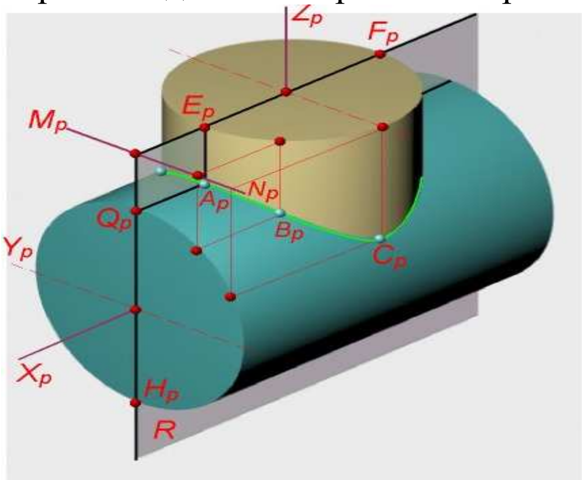

Рис. 4.16

Утворюючі, перетинаючись між собою, дають точки (наприклад, точка **Ap**), приналежні лінії перетину. Для побудови точок необхідної лінії зручно використовувати лінію перетину площин основ циліндрів (**M_pN_p**). Коли на кресленні відсутні проекції основ циліндрів, що перетинаються, то їх можна побудувати поза зображенням самої деталі (рис. 4.17).

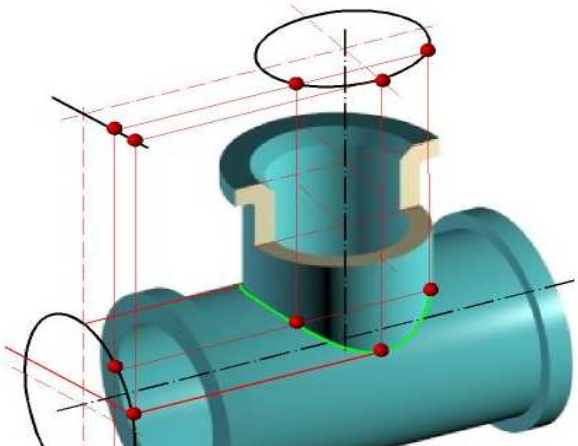

Рис. 4.17

ЛЕКЦІЯ №5. ПЕРЕТИН ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

5.1. Уявлення про посередник
5.2. Перетин площин
5.3. Перетин прямої лінії з площиною
5.4. Перетин геометричного тіла проекціюючою площиною
5.5. Конічні перерізи
5.6. Перетин прямої лінії з поверхнею

Геометричні фігури (точки, лінії, поверхні, тіла) мають різне положення (різну позицію) в просторі. При цьому вони можуть належати або не належати одна одній, а також перетинатися. Зазначимо, що під позиційними розуміються задачі, рішення яких дозволяє одержати відповідь на запитання про належність (інцидентність) фігур або їх частин та про перетин фігур.

Фігури, перетинаючись, мають спільні між собою елементи. При цьому в різних випадках спільними елементами можуть бути: одинична точка – при перетині двох прямих або прямої з площиною; кілька точок (частіше - дві) – при перетині прямої з поверхнею; пряма лінія – при перетині двох площин; комбінована лінія – при перетині між собою в різних комбінаціях площин і кривих поверхонь.

5.1. Уявлення про посередник

Перетин фігур дає спільні елементи. При побудові цих елементів на кресленні з'являється необхідність вдаватися до допоміжних геометричних об'єктів, або до так званих посередників. Посередниками частіше всього бувають площини, а в деяких випадках також і криві поверхні, такі як сфера, а іноді – циліндрична і конічна поверхні. Суть застосування посередника полягає в тому, що, вводячи його в контакт з фігурами, які перетинаються, і розташовуючи фігури зручно для вирішення задачі, визначаємо спочатку спільні елементи посередника з кожною із заданих фігур, а потім знаходимо елементи, спільні для двох заданих фігур.

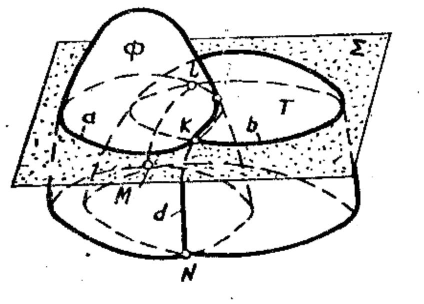

Рис. 5.1.

При визначенні лінії перетину поверхонь Ф і Т (рис. 5.1) посередником є площина Σ. Ця площина-посередник перетинає поверхню Ф по лінії *a* і поверхню Т по лінії *b*. Лінії *a* та *b* перетинаються між собою, бо лежать в одній площині-посереднику. Точки перетину К та L ліній *a* і *b* тепер виявляються спільними і для поверхонь Ф і Т. так, застосовуючи кожного разу новий посередник, ми будемо визначати нову пару спільних точок для поверхонь Ф і

Т. Геометричне місце знайдених таким чином спільних точок дає лінію перетину *d*, яку шукаємо.

5.2. Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії. Щоб побудувати цю лінію на кресленні, досить знайти на ньому дві точки, належні заданим двом площинам.

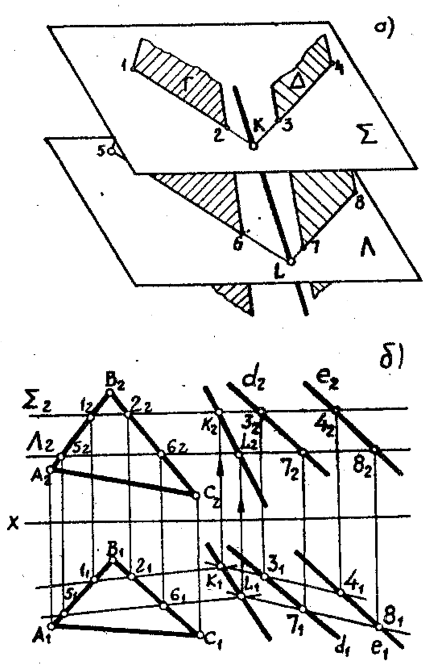

Рис. 5.2.

Для визначення точок необхідно скористатись двома площинами-посередниками Σ та Λ (рис. 5.2). Площини Σ та Λ перетнуть дві задані площини Г та Δ по прямих 12, 34 та 56, 78. Прямі 12, 34 лежать в площині Σ і перетинаються в точці К, що належить трьом площинам і лінії перетину. Другу точку L, спільну для обох площин, будемо мати, застосувавши другу площину-посередник – площину Λ.

На кресленні (рис. 5.2) площина Г задана трикутником АВС, а площина Δ – паралельними прямими *d* та *е*. Для визначення точки К (K_1, K_2) проводимо фронтальний Σ_2 слід – проекцію горизонтальної площини Σ. Ця площина перетинає площину трикутника по горизонталі 12, а площину паралельних прямих – по горизонталі 34. Горизонтальні проекції $1_1 2_1$ та $3_1 4_1$ цих горизонталей, перетнувшись, дають горизонтальну проекцію K_1 точки К, що належить лінії перетину даних площин. Фронтальну проекцію K_2 точки К знайдемо, провівши лінію проекційного зв'язку до перетину з Σ_2 площини Σ. Друга точка, що визначить лінію перетину, - точка L знайдена за допомогою площини Λ. Замість горизонтальних площин-посередників можна скористатись фронтальними і тоді дві необхідні нам точки стануть результатом перетину фронталей тих площин, що перетинаються.

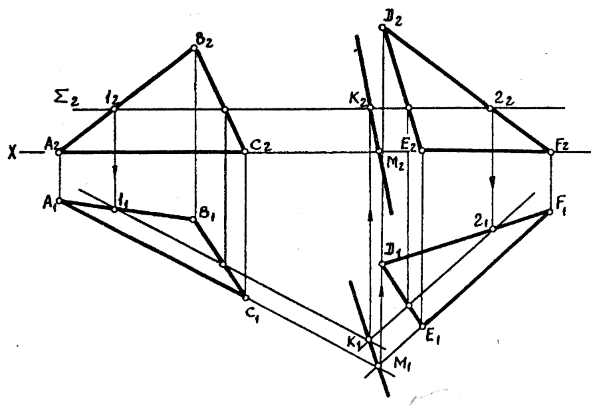

Рис. 5.3.

Визначимо лінію перетину площин, заданих трикутниками ABC та DEF (рис. 5.3.). Одна із сторін кожного трикутника розташована в горизонтальній площині проекцій $П_1$. Очевидно, що лінія EF площини DEF та лінія AC площини ABC перетинаються між собою, бо лежать в одній площині. Точка перетину M (M_1, M_2) цих прямих є однією з точок лінії перетину. Другу точку K (K_1, K_2) одержимо за допомогою горизонтальної площини-посередника Σ ($Σ_2$). Лінії AC та EF в задачі, що розглядаємо, є горизонтальними слідами заданих площин.

5.3. Перетин прямої лінії з площиною

Будь-яка пряма, непаралельна площині, має з останньою одну спільну точку – точку перетину. Припустимо, що задана площина Δ та пряма *a* (рис. 5.4.). Необхідно визначити точку їх перетину O. При розв'язанні такої задачі треба керуватись послідовністю:

- через пряму провести допоміжну площину;
- знайти пряму перетину даної площини з допоміжною;
- зафіксувати точку перетину даної прямої з побудованою прямою перетину площин.

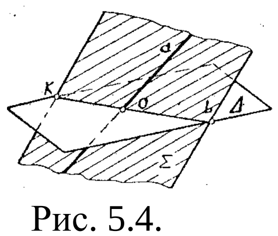

Рис. 5.4.

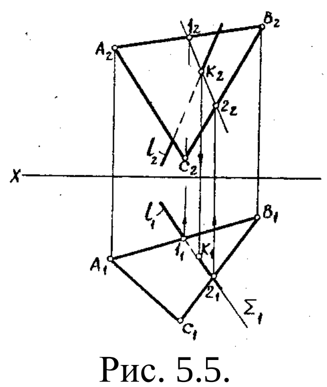

Рис. 5.5.

На кресленні (рис. 5.5) показані побудови, необхідні для визначення точки перетину прямої l з площиною АВС. Ці побудови мають таку послідовність. Спочатку через пряму l проведена горизонтально проекціююча площина Σ, чому на кресленні відповідає збіг Σ_1 з l_1. А далі побудована пряма перетину 12 площини АВС з площиною Σ та зафіксована точка перетину К (K_1, K_2). З горизонтальним слідом-проекцією Σ_1 на кресленні збігається, крім горизонтальної проекції l_1 прямої, також і горизонтальна проекція $1_1 2_1$ прямої перетину. В просторі ж пряма перетину 12 і задана пряма l не збігаються. В цьому легко впевнитись, якщо подивитись на фронтальні проекції $1_2 2_2$ і l_2.

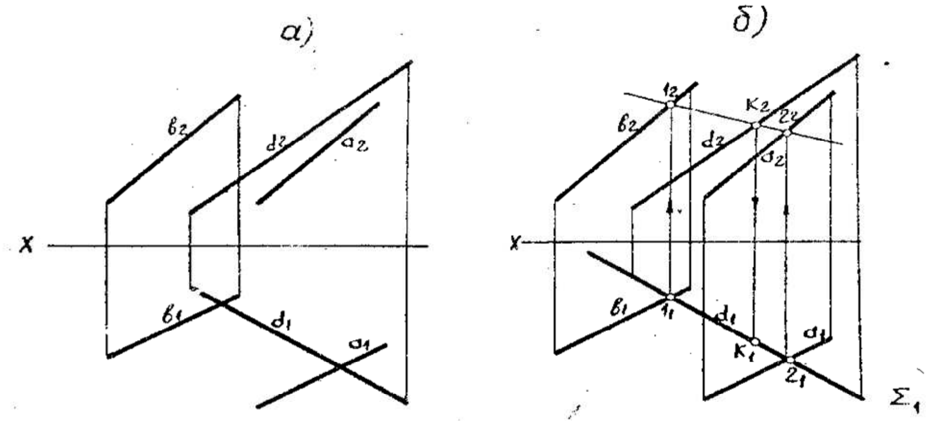

Рис. 5.6.

На рис. 5.6 показана побудова точки перетину прямої d з площиною, заданою паралельними прямими a та b. Спочатку через пряму d проведена допоміжна горизонтально проекціююча площина Σ (слід-проекція Σ_1 збігається з проекцією d_1), потім побудована пряма перетину 12 ($1_1 2_1$, $1_2 2_2$) площини Г (a||b) з площиною Σ (Σ_1), далі зафіксована і позначена точка К (K_1, K_2) перетину прямої d з площиною Г.

У випадку, коли площина задана слідами, треба мати на увазі, що сліди площини являють собою пару прямих, які перетинаються на осі проекцій. На кресленні (рис. 5.7) показана побудова точки перетину (зустрічі) прямої a (a_1, a_2) з площиною Δ(m∩n), заданою слідами. І тут побудова йде за тією ж послідовністю: проведена допоміжна горизонтально проекціююча площина Σ (Σ_1), побудована пряма перетину MN (M_1N_1, M_2N_2) площин Δ та Σ, зафіксована спочатку фронтальна проекція K_2, а потім горизонтальна K_1 точки К перетину.

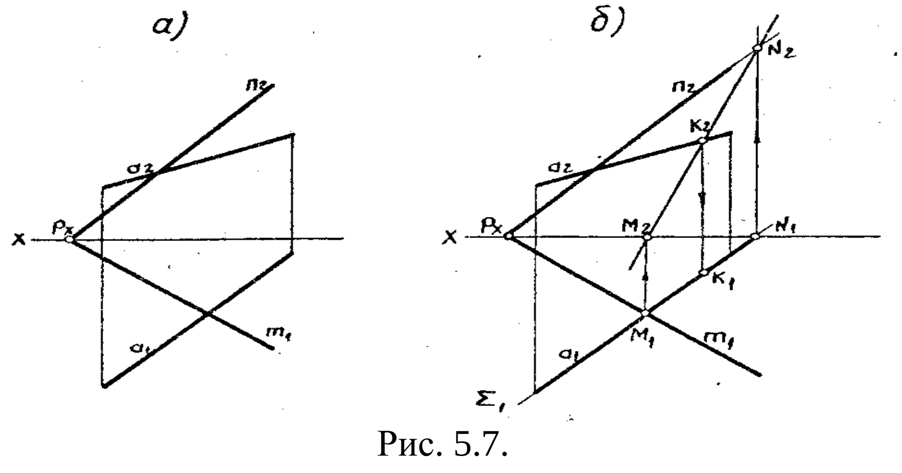

Рис. 5.7.

Побудова точки перетину прямої з проекціюючою площиною значно спрощується, бо в цьому випадку проекція заданої площини на одну з площин проекцій є пряма лінія. Тому точка перетину фіксується "автоматично" на одній з площин проекцій в момент, коли фіксуються на кресленні задані пряма та площина. На кресленні (рис. 5.8) задана фронтально проекціююча площина Σ (Σ_2) та пряма *a* (a_1, a_2). Цим уже зафіксована фронтальна проекція K_2 точки перетину K даних прямої і площини. Проекція K_1 точки, що шукаємо, належить проекції a_1 прямої. На кресленні (рис. 5.8) показано перетин прямої з горизонтально проекціюючою площиною ABC.

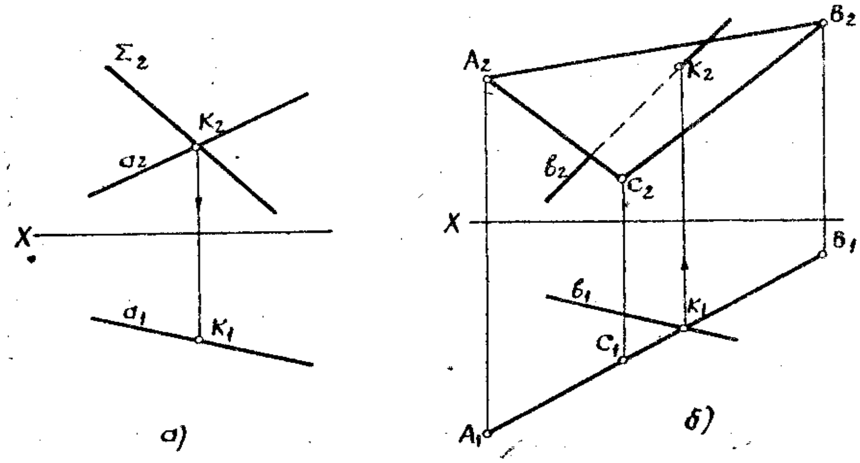

Рис. 5.8.

5.4. Перетин геометричного тіла проекціюючою площиною

Побудова проекції лінії перетину в цьому випадку здійснюється простіше, бо одна із проекцій лінії збігається зі слідом-проекцією площини. На кресленні (рис. 5.9) зображено нахилений циліндр, що перетинається проекціюючою площиною Σ (Σ_2). Після нанесення кількох твірних циліндра на сліді січної площини фіксуються фронтальні проекції A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 точок зустрічі твірних з площиною, а потім і горизонтальні A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. На кресленні (рис.5.10) здійснено побудову лінії перетину поверхні піраміди проекціюючою площиною.

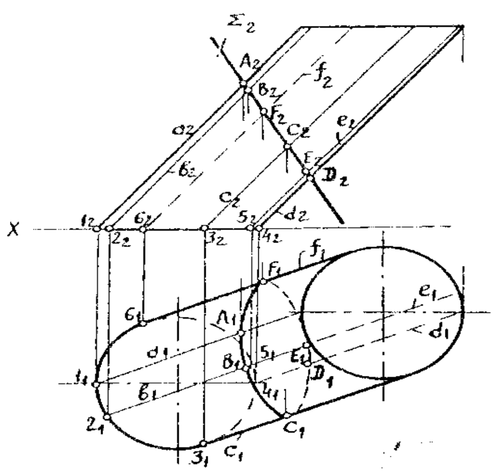
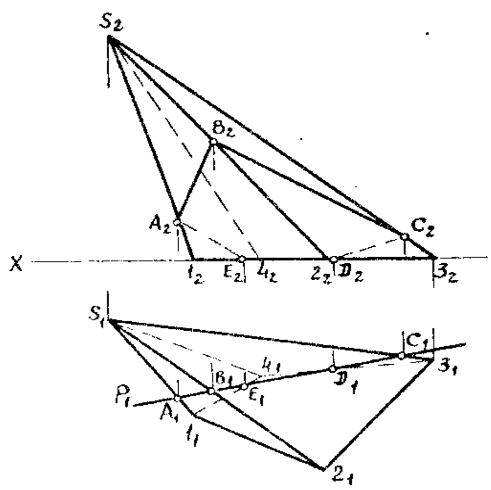
Рис. 5.9. Рис. 5.10.

Фронтальною проекцією лінії перетину поверхні кулі горизонтально проекціюючою площиною є еліпс, побудову якого можна вести за його осями або по окремих точках. При побудові еліпса треба мати на увазі, що його мала вісь по величині є фронтальною проекцією діаметра кола перетину, а велика вісь є діаметром цього кола. Якщо лінію перетину будувати за допомогою окремих точок, тоді кожна з точок визначається при допомозі січних площин так, як на кресленні визначені точки K (K_1, K_2) та L (L_1, L_2) за допомогою площини Ω (Ω_1).

5.5. Конічні перерізи

Візьмемо конус обертання (рис. 5.11) і перетнемо його площинами з такою орієнтацією:

площина Δ (Δ_2) перетинає всі твірні конуса;

площина Г (Γ_2) паралельна єдиній твірній;

площина Σ (Σ_2) паралельна двом твірним;

площина Λ (Λ_2) проходить через вершину.

Результатом перетину будуть: в першому випадку еліпс (коло в тому числі), в другому – парабола, в третьому – гіпербола, в четвертому – дві перетинні прямі.

Вид конічного перерізу може також визначатися порівнянням величини кута φ, утвореного слідом січної площини і віссю конуса, з величиною кута θ, що являє собою половину кути при вершині конуса. Якщо $\varphi>\theta$, то результат перетину – еліпс (в тому числі коло);

якщо $\varphi=\theta$, - парабола;

якщо $\varphi<\theta$, - гіпербола.

Величина будь-якого конічного перерізу може бути побудована за допомогою двох координат.

Зупинимось на визначенні величини малої та великої осей еліптичного розрізу. На кресленні (рис. 5.12) дано прямий конус обертання і його січну площину Г (Γ_2). Очевидно, що великою віссю еліпса перерізу стане відрізок сліду площини, що міститься між обрисовими твірними конуса. Мала вісь проходить через середину великої і в даному випадку перпендикулярна площині Π_2. Щоб визначити величину малої осі досить через точку середини великої осі провести допоміжну січну площину Ω (Ω_2) і побудувати коло радіуса 01. Відрізок AB (A_1B_1) лінії перетину площин Ω та Г – мала вісь.

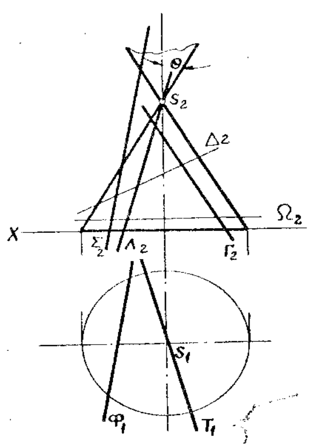

Рис. 5.11.

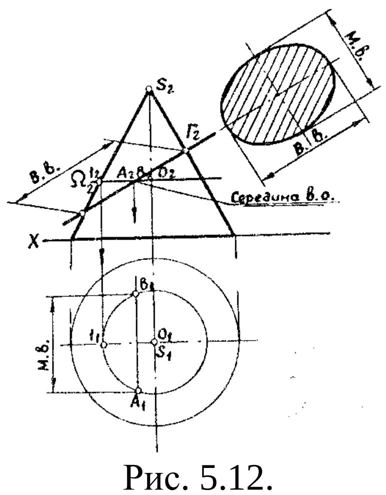

Рис. 5.12.

5.6. Перетин прямої лінії з поверхнею

Перетин прямої з поверхнею вище розглядався, але то був особливий випадок і мав відношення лише до поверхні першого порядку, тобто до площини. При перетині прямої з поверхнями загального виду рішення значно ускладнюється, хоч послідовність його залишається тією ж самою:

- через пряму проводиться площина-посередник;
- відшукується лінія перетину площини-посередника з поверхнею даного тіла;
- фіксується точка перетину даної прямої зі знайденою лінією перетину.

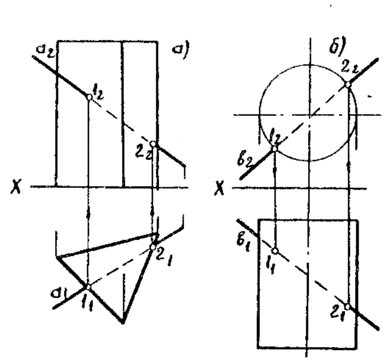

Рис. 5.13.

Коли поверхня тіла проекціююча, точка перетину визначається без допоміжних побудов. На кресленнях (рис. 5.13.) зображені тригранна призма і циліндр, бокові поверхні яких складаються з проекціюючих поверхонь. Горизонтальні проекції 1_1 та 2_1 точок перетину прямої *а* (a_1, a_2) з поверхнею призми (рис. 5.13) фіксуються безпосередньо на проекції a_1 прямої. Фронтальні проекції 1_2 та 2_2 фіксуються на a_2, користуючись проекційним зв'язком. Для визначення точок зустрічі прямої а (a_1, a_2) з нахиленою призмою (рис. 5.14) через пряму проведено допоміжну фронтально проекціюючу площину Σ (Σ_2), знайдено лінію перетину ABC площини Σ з поверхнею призми, а потім – самі точки перетину 1 $(1_1, 1_2)$ та 2 $(2_1, 2_2)$.

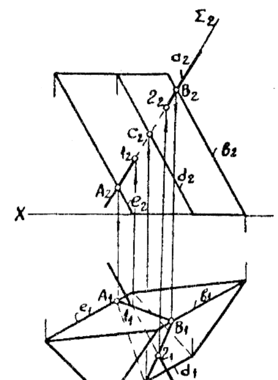

Рис. 5.14.

Раціональне вирішення задачі, поставленої в загальному вигляді, залежить від того, чи дає площина-посередник прості лінії-посередники. На кресленні (рис. 5.15) проведено площину-посередник через вершину конуса S (S_1, S_2) і точку К (K_1, K_2), довільно взяту на заданій прямій *a* (a_1, a_2). Площину-посередник, таким чином, орієнтовано так, що вона перетинає конус по простій ламаній – трикутнику. Для побудови цього трикутника визначимо слід m_1 площини-посередника, який пройде через сліди M_1 та $\overline{M}_1$ прямих *a* та *SK*. Відрізок EF сліду m_1 з вершиною S конуса задають необхідний трикутник. Січна пряма *a*, розташовуючись в площині трикутника, перетинається з SE та SF і дає точки 1 (1_1, 1_2) та 2 (2_1, 2_2) зустрічі прямої *a* з поверхнею конуса. Пряма на горизонтальній проекції в межах дільниці $M_1 1_1$ видна, а потім входить в тіло і, вийшовши з нього в точці 2_1, залишається невидною на невеликому відрізку, бо закрита конусом. На фронтальній проекції обидві точки невидні.

На кресленні (рис.5.16) подано аналогічне рішення для нахиленого циліндра, де пряма КМ (K_1M_1, K_2M_2) проведена паралельно твірним. Побудувавши слід *m* (m_1) площини-посередника, позначимо точки С (C_1) та D (D_1) перетину сліду з основою циліндра. Через ці точки паралельно твірним проведені прямі *d* (d_1) та *e* (e_1), що є лініями перетину площини-посередника з поверхнею циліндра. Точки 1_1 і 2_1 перетину d_1 та e_1 з a_1 – горизонтальні проекції точок зустрічі даної прямої з циліндром.

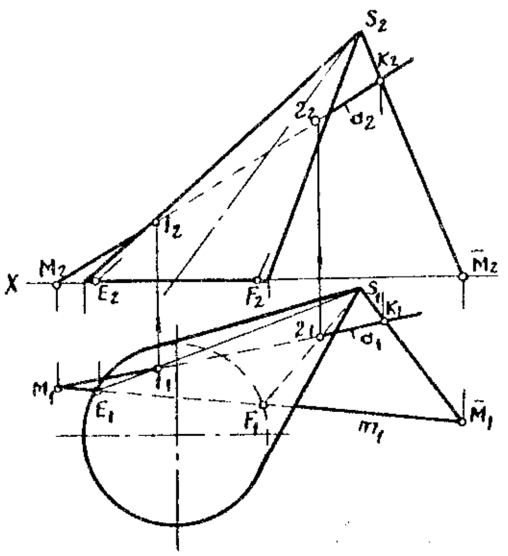

Рис. 5.15.

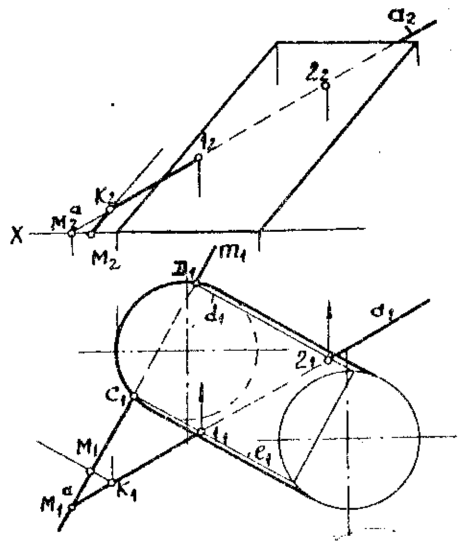

Рис. 5.16.

ЛЕКЦІЯ №6. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

6.1. Метод січних площин

При визначенні ліній перетину поверхонь тіл необхідно пам’ятати, що проекції цієї лінії не можуть розташовуватись за межами поля накладання однойменних проекцій тіл. Якщо маємо фронтальні проекції Φ_2 і T_2 тіл Ф і Т, то всі точки лінії перетину будуть розташовуватись в межах заштрихованого поля.

Визначаючи лінію перетину граних та кривих поверхонь, ми зустрічаємось з двома більш простими позиційними задачами – перетином поверхні з площиною та поверхні з прямою. При перетині граних поверхонь між собою визначаємо точки зустрічі ребер однієї з гранями другої або навпаки. Якщо при цьому одне з тіл має набір горизонтально або фронтально проекціюючих поверхонь, то розв'язання здійснюється відносно просто. Такий випадок показано на кресленні, де у поверхню призми входять горизонтально проекціюючі бічні грані, з якими точки зустрічі 1, 2, 3, 4, 5, 6 ребер піраміди визначаються без допоміжних побудов. На кресленні маємо прямий круговий конус та призму. При побудові лінії перетину використовуємо тепер фронтально проекціююче положення граней призми. Тут фронтальні проекції лінії перетину і граней збігаються. Горизонтальна проекція будь-якої точки лінії перетину може бути знайдена за допомогою твірних конуса або січних горизонтальних площин. Точки 7 та 8 визначені за допомогою твірних SA та SB, а точки 1, 2, 3, 4 – за допомогою горизонтальних площин Σ та Т.

6.1. Метод січних площин

При визначенні ліній перетину лінійчатих поверхонь зручно використовувати засіб пучка площин-посередників. На кресленні задані нахилені конус та призма. Проведемо через вершину конуса пряму d (d_1, d_2) паралельно ребрам призми, потім через цю пряму проведемо пучок площин. Із безлічі площин, що проходять через пряму d, можуть бути посередниками лише ті, що перетинають одночасно і конус, і призму. Ця частина пучка визначається тією частиною горизонтальних слідів площин, що одночасно перетинають горизонтальні сліди даних поверхонь. Сліди m_1 та m_1^2 будуть слідами площин, що є двома межами потрібної нам частини площин-посередників. Одна з площин пройде через ребро b (b_1, b_2) призми (m_1 – її слід), а друга (m_1^2 – її слід) – через твірну SF конуса. Із проміжних площин-посередників проведена лише площина через ребро a (a_1, a_2) призми (її слід m_1^1). Площина, що проходить через ребро b (b_1, b_2) призми, перетне поверхню конуса по твірних SA, SB, які перетинаючись з ребром, дадуть точки 1 (1_1, 1_2) та 2 (2_1, 2_2). Точки 3 (3_1, 3_2), 4 (4_1, 4_2) визначені за допомогою площини, проведеної через ребро a (a_1, a_2), що перетинає конус по твірних SD та SE. Точки 5 (5_1, 5_2) та 6 (6_1, 6_2) визначені як точки перетину твірної SF конуса з гранями призми, яка перетинається площиною (її слід m_1^2) по прямих e (e_1, e_2) та f (f_1, f_2). Щоб визначити ще ряд проміжних точок, треба провести кілька площин у межах пучка-посередника.

Розглянутий випадок перетину конуса та призми можна розповсюдити на випадок, коли два тіла є конусопірамідальними, а також на той випадок, де перетинаються тіла циліндропризматичні. В першому випадку посередниками будуть площини пучка прямої, що з'єднує вершини конусопірамід, в другому– площини із пучка паралельних, що орієнтовані площиною паралелізму. Ця остання визначається двома перетинними прямими, проведеними через довільну точку, одна з яких паралельна твірним циліндра, а друга – ребрам призми. На кресленні показані горизонтальні сліди m_1, m_1^1, m_1^2, m_1^3 пучка перетинних площин-посередників. Пучок перетинних площин-посередників задано і на наступному кресленні.

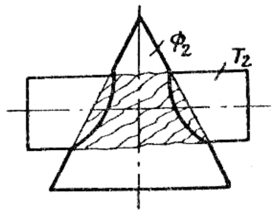

Рис. 6.1.

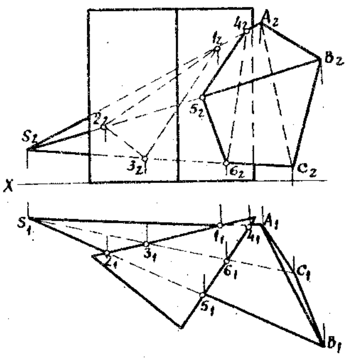

Рис. 6.2.

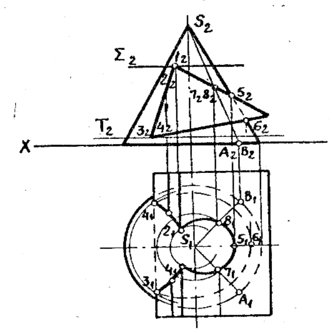

Рис. 6.3.

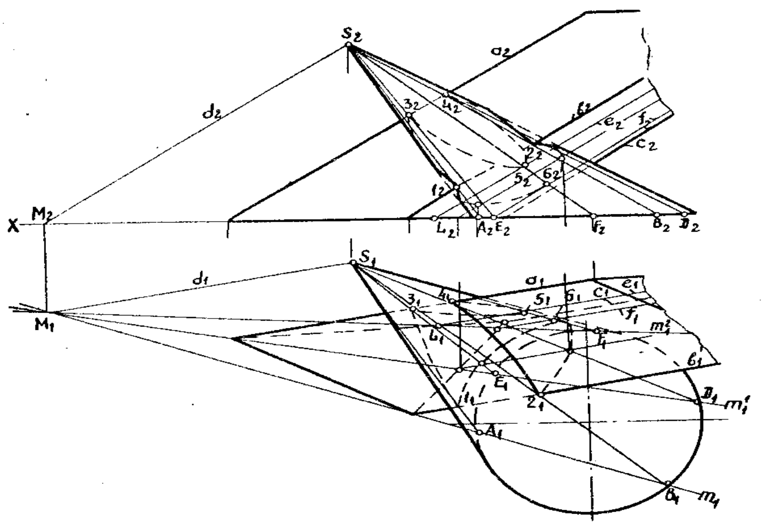

Рис. 6.4.

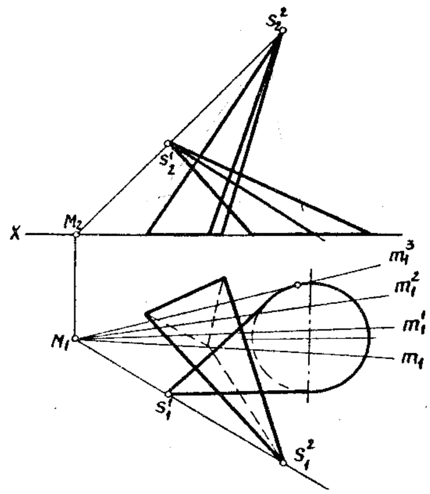

Рис. 6.5.

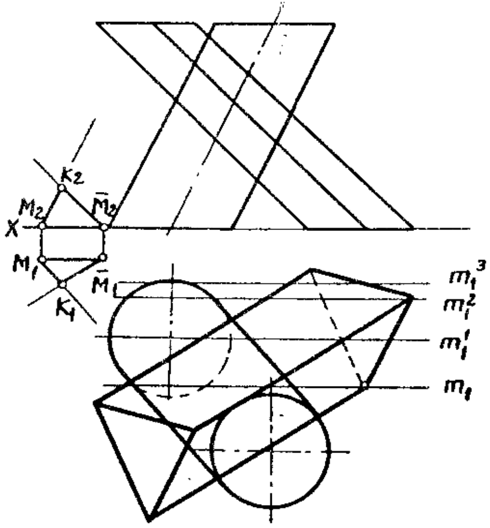

Рис. 6.6.

ЛЕКЦІЯ №7. ВЗАЄМНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ ЛІНІЙ ТА ПЛОЩИН

7.1. Проекції прямого кута
7.2. Перпендикулярність прямої та площини
7.3. Перпендикулярність двох площин

З усіх можливих взаємних положень прямих ліній і площин розглянемо ті випадки, коли пряма перпендикулярна до площини та коли площини взаємно перпендикулярні. Операції, пов’язані з перпендикулярністю, відносяться до основних графічних операцій.

7.1. Проекції прямого кута

Будь-який кут проекціюється на площину в рівновеликий кут (в натуру) тільки в тому випадку, коли сторони його паралельні площині проекцій. На відміну від інших, прямий кут проекціюється в рівновеликий не лише в зазначеному випадку, але і тоді, коли хоч одна його сторона паралельна площині проекцій. Сторона ВС прямого кута АВС розташована довільно, а сторона АВ паралельна площині Π_1. Щоб довести, що при цьому кут $A_1B_1C_1$ залишиться прямим, проведемо в площині Π_1 пряму MD паралельно A_1B_1 (а також і AB). Тепер MD – перпендикуляр до BC і, згідно з теоремою про три перпендикуляри, кут DMB_1 – прямий. Але якщо Паралельна A_1B_1, то кут $A_1B_1C_1$ теж прямий.

7.2. Перпендикулярність прямої та площини

Пряма та площина взаємно перпендикулярні, якщо пряма перпендикулярна до двох перетин них прямих, розташованих в площині. А як спроекціюються на площину проекцій два прямих лінійних кути, утворені парою перетин них прямих і перпендикуляром до них? У випадку, коли сторони зазначених кутів є прямі загального положення, прямі кути спроекціюються на площини проекцій не в рівновеликі собі. Якщо ж за сторони прямого кута в площині взяти дві прямі так, щоб одна з них булу паралельна площині Π_1, а друга – Π_2, то кути, утворені з кожною із взятих таким чином прямих і перпендикуляром до них, спроекціюються на відповідні площини проекцій у прямі кути. Інакше кажучи, якщо серед безлічі прямих в площині взяти її горизонталь і фронталь, тоді на кресленні p_1 перпендикуляра p з горизонтальною проекцією h_1 горизонталі і p_2 перпендикуляра p з фронтальною проекцією f_2 фронталі утворять прямі кути. Таким чином, площина та пряма взаємно перпендикулярні, якщо горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція прямої перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі площини.

7.3. Перпендикулярність двох площин

Дві площини перпендикулярні між собою, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до другої. Тому будь-яка задача на побудову взаємно перпендикулярних площин вирішується за допомогою прямої, перпендикулярної до площини. На кресленні через задану точку A (A_1, A_2) проведена площина Г ($p \cap d$) перпендикулярно заданій площині Σ ($a \cap b$). Площина, що будується, на кресленні зафіксована двома перетин ними прямими в точці A, одна з яких d (d_1, d_2) проведена довільно, а друга p (p_1, p_2) є перпендикуляром до заданої площини Σ. Перед тим, як був проведений перпендикуляр до площини Σ, на ній побудовано горизонталь h (h_1, h_2) та фронталь f (f_1, f_2). Потім через A_1 проведена проекція p_1 перпендикулярно h_1, а через A_2 – проекція $p_2 \perp f_2$. На кресленні вирішена та ж задача, але для випадку, коли площина задана слідами. Тут орієнтирами, що визначають положення проекцій p_1 і p_2 перпендикуляра до площини, є сліди цієї площини, бо $p_1 \perp m_1$, а $p_2 \perp n_2$.

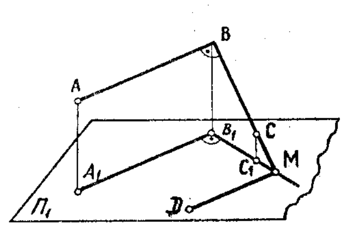

Рис. 7.1.

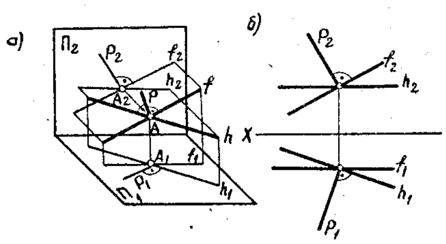

Рис. 7.2.

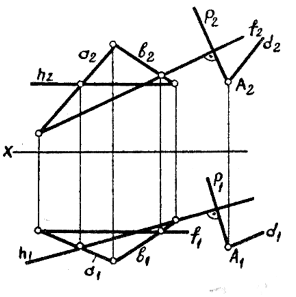

Рис. 7.3.

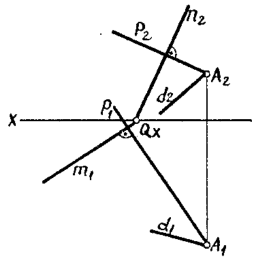

Рис. 7.4.

ЛЕКЦІЯ №8. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

8.1. Плоско-паралельне переміщення
8.2. Заміна площин проекцій
8.3. Визначення відстаней

8.1. Плоско-паралельне переміщення

Будь-який об’єкт можна привести в бажане розташування відносно площин проекцій, використовуючи не обертальне, а довільне плоско-паралельне переміщення, тобто таке, при якому всі точки переміщуються в площинах, паралельних між собою, а відстані між точками залишаються незмінними. Розглянемо таке переміщення в площинах, паралельних якій-небудь площині проекцій, тобто в площинах рівня. Якщо, наприклад, кінці A і B відрізка перемістити в площинах Σ та Ω, то проекція відрізка на площину Π_1 своєї величини не змінить, тобто $A_1B_1=\overline{A}_1\overline{B}_1$. Фронтальні проекції всіх точок відрізка мають при цьому переміщенні прямолінійні траєкторії, паралельні осі X. При необхідності можна послідовно здійснити цілий ряд плоско-паралельних переміщень.

Припустимо, що задана пряма *a* $(a_1,\ a_2)$. Треба плоско-паралельним переміщенням привести її в горизонтально проекціююче положення.

Позначимо спочатку на прямій дві точки 1 (1_1, 1_2) та 2 (2_1, 2_2) і перемістимо їх разом з прямою так, щоб проекції 1_1 та 2_1 після переміщення розташувались паралельно осі X, при цьому $1_1 2_1 = \overline{1}_1 \overline{2}_1$. Фронтальні проекції перемістяться по прямих $1_2 \overline{1}_2$ та $2_2 \overline{2}_2$ і після встановлення проекційного зв'язку між проекціями пряма a стане в просторі паралельною площині $П_2$. Після цього перемістимо пряму у фронтальній площині до положення, коли фронтальна проекція $\overline{\overline{1_2 2_2}}$ стане перпендикулярною до осі X. Проекції $\overline{1}_1$ та $\overline{2}_1$ перемістяться по прямій, паралельній осі X, і, зберігаючи проекційний зв'язок з $\overline{\overline{1_2 2_2}}$, зіллються в одну точку $\overline{\overline{1}}_2 \equiv \overline{\overline{2}}_2$, вказуючи на те, що пряма внаслідок подвійного переміщення стала горизонтально проекціюючою.

8.2. Заміна площин проекцій

Перетворення за допомогою заміни площин проекцій полягає в тому, що потрібне розташування об'єкта відносно площин проекцій досягається заміною однієї системи площин проекцій на іншу при непорушному об'єкті. При кожній такій заміні нова система двох площин проекцій має в своєму складі одну площину проекцій з попередньої системи.

Систему площин проекцій $X_{12}\dfrac{П_2}{П_1}$ можна замінити новою X_{14}, в якій площина $П_1$ залишиться, а площина $П_2$ буде замінена будь-якою горизонтально проекціюючою площиною. Точка А в системі X_{12} має проекції A_1 та A_2, а в системі X_{14} – проекції A_1 та A_4. Сумістивши площини $П_1$ та $П_4$ в одну площину, одержимо креслення системи X_{14}. Внаслідок того, що проекції A_2 та A_4 здобуті за допомогою проекціюючих променів AA_2 та AA_4, паралельних площині $П_1$, відстані цих проекцій до осей X_{12} та X_{14} (до площини $П_1$) однакові, тобто $A_2A_{x12}=A_4A_{x14}$ **(1).** Вихідну систему X_{12} можна замінити на X_{24} так, що $П_2$ залишиться для нової системи, а площину $П_1$ замінить будь-яка фронтально проекціююча площина. В цьому випадку креслення нової системи X_{24} будується, виходячи з того, що $A_1A_{x12}=A_4A_{x24}$ **(2)**. Можна здійснити послідовно кілька замін. При цьому креслення кожної наступної системи будемо мати із попередньої системи на основі рівностей (1) чи (2). Перетворюючи креслення за способом заміни, належить пам'ятати:

1. Вісь проекцій кожної нової системи можна наносити в будь-якому місці поля креслення, напрямок її обумовлюється розв'язанням задачі.
2. Для кожної системи дві проекції об'єкта розташовані на спільному перпендикулярі до осі проекцій цієї системи.
3. Відстань від осі нової системи до проекції точки на площину, що замінює, дорівнює відстані від осі проекцій вихідної системи до проекції тієї ж точки на площину, що змінюється.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.

Дана пряма АВ. Необхідно перетворити креслення так, щоб в новій системі X_{14} пряма була паралельна до площини проекцій $П_4$.

Щоб пряма стала паралельною $П_4$, в новій системі проводимо вісь проекцій X_{14} паралельно горизонтальній проекції A_1B_1 прямої. Потім через A_1 та B_1 проводимо лінії проекційного зв'язку нової системи (перпендикуляри до X_{14}) і на них від X_{14} відкладаємо відстані $A_{x14}A_4=A_2A_{x12}$ та $B_{x14}B_4=B_2B_{x12}$. Ці відстані можна відкладати, залежно від наявності вільного місця, в один або в другий бік.

Приклад 2.

Здійснити заміну площин так, щоб пряма АВ стала в новій системі перпендикулярною горизонтальній площині проекцій.

Щоб задана пряма загального положення спроекціювалася в точку на площину, що замінює, ця площина повинна бути нахиленою до площин $П_1$ та $П_2$, а не перпендикулярною до однієї з них, чого вимагає спосіб заміни площин проекцій. Таким чином, за допомогою однієї заміни можна мати проекцію прямої у вигляді точки лише тоді, коли ця пряма паралельна якійсь площині проекцій у вихідній системі. Щоб вирішити поставлену задачу з прямою загального положення, необхідна послідовна заміна двох площин проекцій: спочатку $П_2$ на $П_4$, а потім $П_4$ на $П_5$.

Приклад 3.

Площину АВС загального положення перетворити в проекціюючу відносно якоїсь площини проекцій. Задана площина стане в новій системі проекціюючою лише тоді, коли замінююча площина проекцій (нова) розташується перпендикулярно якійсь прямій заданої площини. Для того, щоб достатньою була лише одна заміна, замінююча площина $П_4$, будучи перпендикулярною до $П_2$, повинна розташуватись перпендикулярно і до фронталей даної площини. На кресленні через точку А проведена фронталь *f* (f_1, f_2) заданої площини та зображена площина $П_4$. Після цього побудована f_4 фронталі f та B_4 точки В на площині $П_4$. Пряма, що з'єднує точки $A_4 \equiv f_4$ та B_4, є слідом-проекцією площини АВС в системі X_{24} площин проекцій $\frac{П_2}{П_4}$.

8.3. Визначення відстаней

Для визначення відстані між точкою А (A_1, A_2) та прямою *a* (a_1, a_2) скористуємось обертанням навколо прямої рівня. При цьому через точку А проведемо горизонтальну пряму *i* (i_1, i_2), що перетинає дану пряму в точці 1 $(1_1, 1_2)$. Далі повернемо задану пряму навколо прямої *i* до горизонтального положення. Для здійснення цього повороту позначена довільна точка 2 $(2_1, 2_2)$ і через проекцію 2_1 проведено слід горизонтально проекціюючої площини Σ_1, в якій переміщується точка 2. Потім на цьому сліді з центром обертання О (O_1) відкладено радіус обертання точки 2, за величиною рівний відрізку O_1D, і знайдена точка $\overline{2}_1$. Величина відстані $A_1\overline{K}_1$ до прямої $1_1\overline{2}_1$ - відстань, що шукаємо, бо площина 12А паралельна площині $П_1$. Ця задача може бути вирішена подвійним плоско-паралельним переміщенням або подвійною заміною, або подвійним обертанням навколо проекціюючої осі. В усіх трьох випадках задана пряма перетворюється в положення, перпендикулярне площині проекцій.

При визначенні відстані між точкою А (A_1, A_2) і площиною Г (m∩n) повернемо точку разом з площиною навколо горизонтально проекціюючої осі *i* (i_1, i_2) до фронтально проекціюючого положення. Вісь обертання для зручності розташована в площині $П_2$, внаслідок чого точка В (B_1, B_2) фронтального сліду n_2 при обертанні залишається непорушною. Обертання здійснюється так. Із i_1 як із центра проведена дуга кола радіусом i_1F_1 до перетину з віссю X в точці R_x (вона ж $\overline{F}_1$). Знаючи, що точка $\overline{R}_x$ є точкою сходу слідів після повороту, з'єднуємо її з проекцією B_2 нерухомої точки В і знаходимо фронтальний слід $\overline{n}_2$ після повороту. Положення горизонтального сліду $\overline{m}_1$ після повороту теж показане ($\overline{m}_1 \perp X$) на кресленні, хоча для вирішення задачі в цьому немає потреби. Фронтально проекціююче положення площини після повороту обумовило величину кута φ повороту площини та точки А. відрізок $\overline{A}_2\overline{K}_2$, перпендикулярний до сліду $\overline{n}_2$ площини, - відстань від точки до площини.

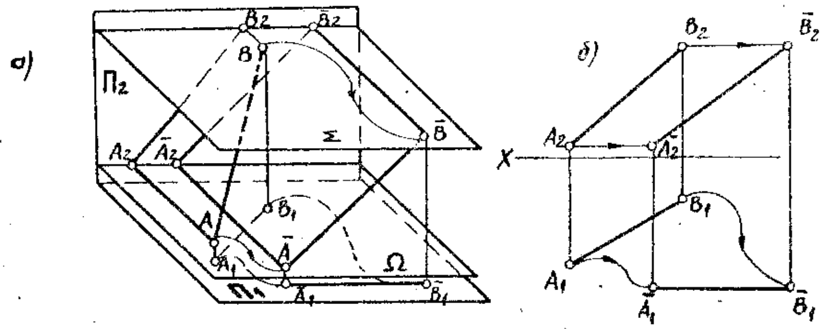

Рис. 8.1.

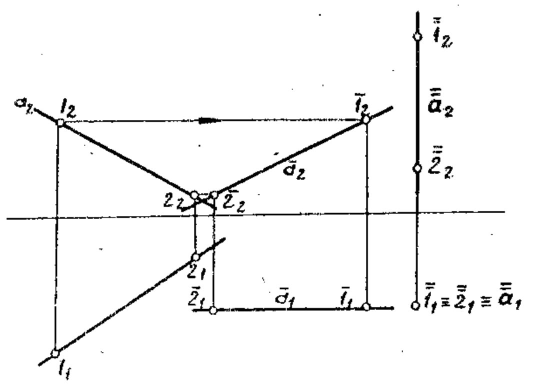

Рис. 8.2.

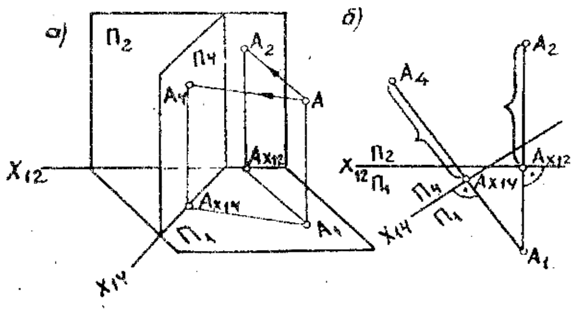

Рис. 8.3.

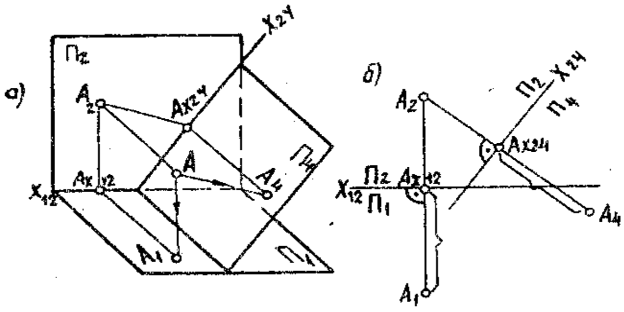

Рис. 8.4.

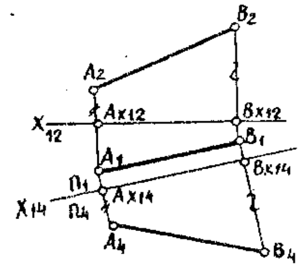

Рис. 8.5.

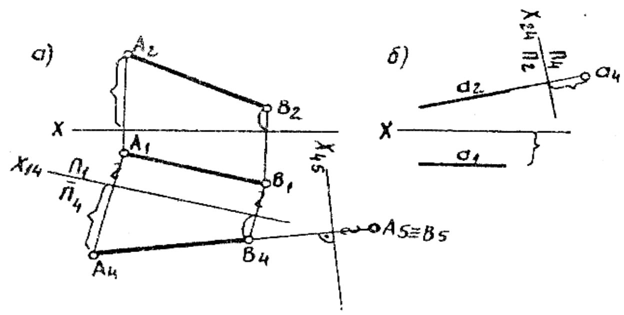

Рис. 8.6.

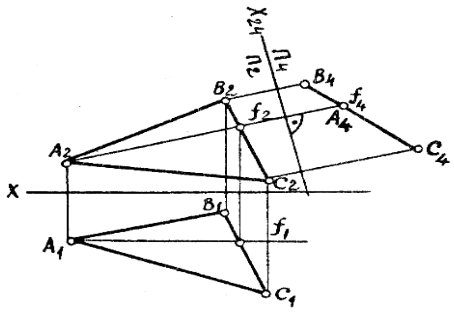

Рис. 8.7.

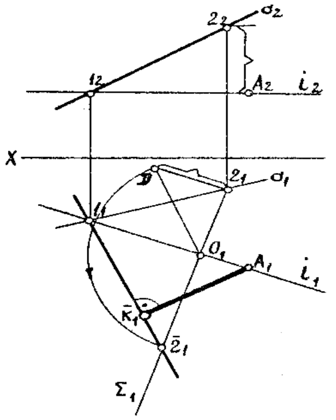

Рис. 8.8.

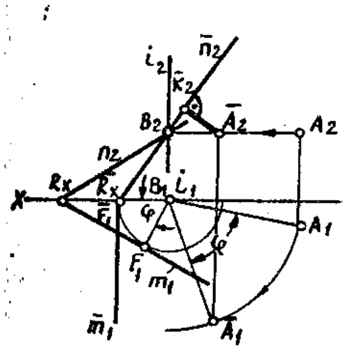

Рис. 8.9.

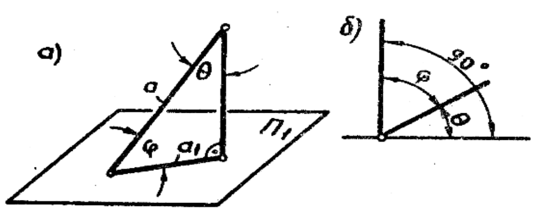

Рис. 8.10.

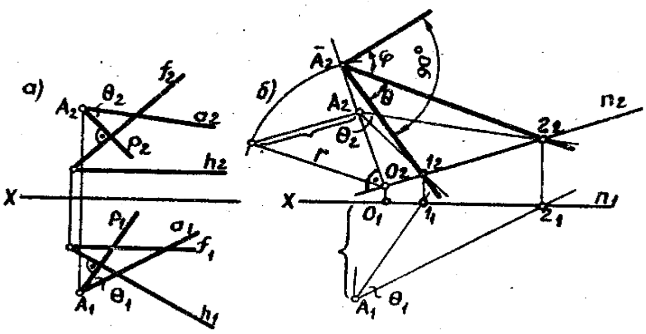

Рис. 8.11.

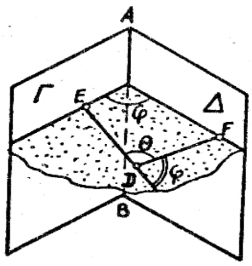

Рис. 8.12.

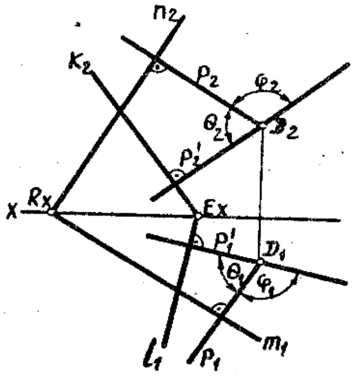

Рис. 8.13.

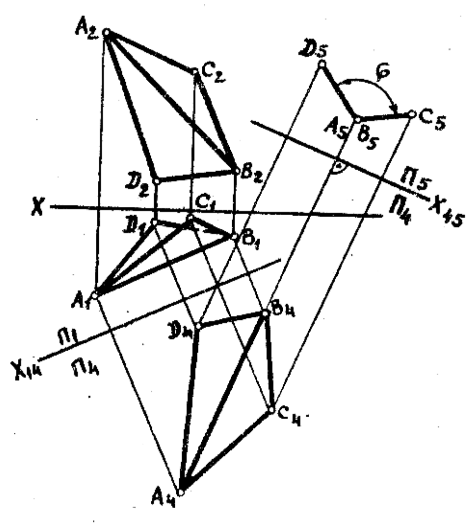

Рис. 8.14.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Гордон В. О., М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. – 24 изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 272 с.

2. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Н. Н. Крылов, П. И. Лобандиевский, С. А. Мэн, В. Л. Николаев, Г. С. Иконникова. – М.: Высш. шк., 1977. – 231 с.

3. Локтев О. В. Краткий курс начертательной геометрии: Ученик для вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 136 с.

4. Локтев О. В., Числов П. А. Задачник по начертательной геометрии: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 104 с.

5. Михайленко В. Е. Пономарев А. М. Инженерная графика: Ученик. – К.: Вища шк., 1990. – 303 с.

6. Черчение / Хаскин А. М. – 4-е узд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1985. – 447 с.

7. Фролов С. А. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.

8. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1977. – 231 с.

9. Короев Ю. Ч. Строительное черчение и рисование. – М., 1983. – 152 с.

10. Семёнов В. Н. Унификация и стандартизация проектной документации в строительстве. – Л., 1985. – 224 с.

11. Попова Г. Н., Алексеев С. Ю. Машиностроительное черчение: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1986. – 447 с.

12. Бриллинг Н. С. Справочник по строительному черчению. – М.: Стройиздат, 1987. – 448 с.

13. Государственные стандарты ЕСКД. – М., 1984.

14. Государственные стандарты СПДС. – М., 1977-1988.

Навчальне видання

ГРИНЬОВА Наталія Володимирівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни

«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

(*для слухачів другої вищої освіти спеціальності
7.05070203 «Електричний транспорт»*)

Редактор *Д. Ф. Курильченко*

Комп'ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2011, поз. 100 Л

Підп. до друку 28.04.2011	Формат 60×84/16
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 2,9
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.